

Conception et fonctionnement du funiculaire de Fourvière

Approches mathématique et physique du produit scalaire

l) programmes mathématiques

• **Produit scalaire**

Contenus

- Définition géométrique : si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$ où θ est une mesure de l'angle entre \vec{u} et \vec{v} ; si \vec{u} ou \vec{v} est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe.
- Interprétation du produit scalaire en termes de projections orthogonales (du vecteur \vec{u} sur l'axe dirigé par \vec{v} ou du vecteur \vec{v} sur l'axe dirigé par \vec{u}).
- Propriétés du produit scalaire : bilinéarité, symétrie.
- Expressions, dans une base orthonormée, du produit scalaire de deux vecteurs, de la norme d'un vecteur.
- Caractérisation de l'orthogonalité.
- Théorème d'Al-Kashi, égalité du parallélogramme.

Capacités attendues

- Calculer la projection d'un vecteur sur un axe.
- Interpréter $\|\vec{u}\| \cos(\theta)$ en termes de projection.
- Utiliser un produit scalaire pour démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs, pour calculer un angle non orienté.
- Utiliser un produit scalaire pour calculer des longueurs.

Commentaires

Les situations de géométrie repérée sont traitées uniquement dans un repère orthonormé.
Le théorème d'Al-Kashi est présenté comme une généralisation du théorème de Pythagore.

Liens avec l'enseignement de physique-chimie

L'étude du travail d'une force lors d'un mouvement rectiligne permet de réinvestir la notion de produit scalaire et de projection d'un vecteur sur un axe. On démontre que le travail d'une force perpendiculaire à la trajectoire est nul ou encore que le travail de la force résultante est la somme des travaux des forces en présence (illustration de la propriété de bilinéarité du produit scalaire).

physique

Actions de contact et actions à distance. Exemples de forces s'exerçant sur un objet : <ul style="list-style-type: none">- poids ;- force exercée par un support ;- force élastique ;- force de frottement fluide. Résultante des forces appliquées à un solide.	<ul style="list-style-type: none">- Exploiter la représentation d'une force s'exerçant en un point par un vecteur : direction, sens et norme.- Identifier, inventorier, caractériser et modéliser par des forces, les actions mécaniques s'exerçant sur un solide.- Effectuer un bilan quantitatif de forces pour un solide à l'équilibre ou en translation rectiligne uniforme.
--	--

Travail d'une force.

- Écrire et exploiter l'expression du travail d'une force constante.

Liens avec les mathématiques

Dérivées.

Produit scalaire.

Exemples de situation-problème d'apprentissage et mini-projets d'application

- Étude de la chute libre avec ou sans frottements ; vitesse limite.

En physique : Le produit scalaire est évoqué, mais peu utilisé : l'élève mémorise souvent une équation, celle du travail du poids, c'est-à-dire le résultat d'une démonstration s'appuyant sur le produit scalaire.

En maths : Le produit scalaire sert à démontrer l'orthogonalité, permet de calculer des longueurs, des angles.

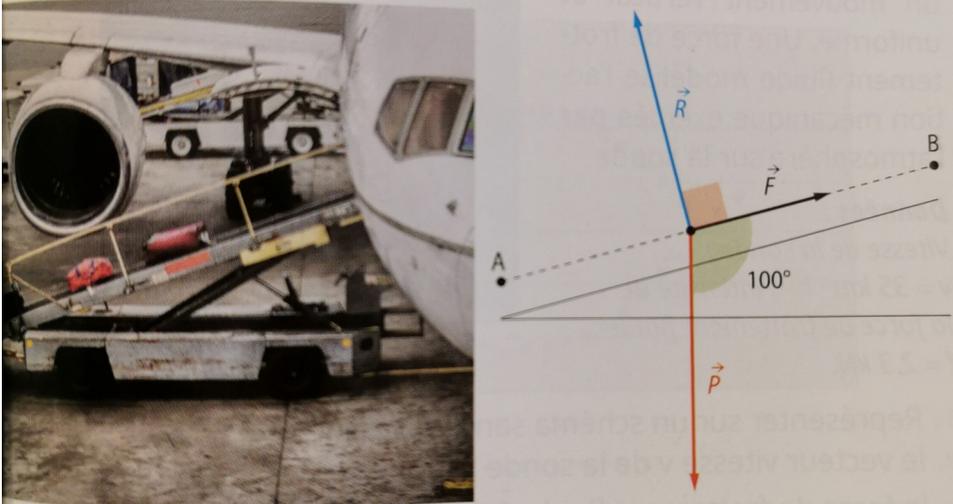
II) exercices types issus de manuels

physique

10 Travail de forces constantes

Pour charger un bagage dans la soute de l'avion, on utilise un tapis roulant. Le système bagage, assimilé à un point matériel, est soumis à trois actions mécaniques modélisées par les forces constantes représentées sur le schéma ci-dessous.

Données : Intensités du poids $P = 300 \text{ N}$, de la réaction $R = 295 \text{ N}$, de la traction $F = 80 \text{ N}$; déplacement $AB = 12,0 \text{ m}$.



1. Identifier la force dont le travail est nul le long du déplacement AB.
2. Exprimer puis calculer $W_{AB}(\vec{F})$ et $W_{AB}(\vec{P})$.
3. Préciser si le travail de chaque force est moteur ou résistant.

11 Travail de géante

La grue géante *Big Benny* a soulevé le dôme de béton de la centrale EPR de Flamanville d'une masse de 260 tonnes jusqu'à 100 mètres de hauteur.

1. Sur un schéma et sans souci d'échelle, représenter la situation.
2. Calculer le travail du poids modélisant l'action mécanique de la Terre sur le dôme lors de son déplacement.
3. Que dire du signe de ce travail ?

maths

28 On considère la droite (d) de vecteur directeur \vec{i} tel que $\|\vec{i}\| = 1$. Dans chaque cas déterminer le projeté orthogonal de \vec{u} sur (d) .

a) $\|\vec{u}\| = 3$ et $(\vec{i}; \vec{u}) = \frac{\pi}{6}$ rad.

b) $\|\vec{u}\| = 6$ et $(\vec{i}; \vec{u}) = -\frac{\pi}{2}$ rad.

c) $\|\vec{u}\| = 5$ et $(\vec{i}; \vec{u}) = \frac{2\pi}{3}$ rad.

d) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $(\vec{i}; \vec{u}) = \frac{\pi}{4}$ rad.

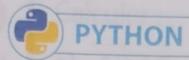
exo 30

Soit A (1 ; 3) ; B (4 ; 2) et C (0 ; 5).

Déterminer la valeur de l'angle \widehat{BAC} en rad puis en degrés.

2

Déterminer si un triangle est rectangle ou non à l'aide de Python



OBJECTIF

- ✓ Écrire une fonction en langage Python, comme arguments les coordonnées de trois points dans un repère orthonormé renvoie le fait que ces trois points forment un triangle rectangle ou non.

A UNE FONCTION « COORDONNÉES DE VECTEURS »

Recopier et compléter la fonction `vec`, programmée en langage Python, ayant pour arguments les coordonnées de deux points et qui renvoie les coordonnées du vecteur dont le premier point est l'origine et le second l'extrémité :

```
defvec(A,B):  
    X=B[...]-A[...]  
    Y=B[...]-A[...]  
    L=[..., ...]  
    return(...)
```

B UNE FONCTION « PRODUIT SCALAIRE »

Écrire en langage Python une fonction `pscal` dont les arguments sont les coordonnées de deux vecteurs dans un repère orthonormé et qui renvoie le produit scalaire de ces vecteurs.

C UNE FONCTION « TRIANGLE RECTANGLE »

- 1 Recopier et compléter la fonction `rec`, programmée en langage Python, en faisant appel à la fonction `pscal`. La fonction `rec` a pour arguments les coordonnées de trois points dans un repère orthonormé et renvoie le fait que le triangle formé par ces trois points est rectangle « en le 1^{er} point » donné.

```
defrec(A,B,C):  
    L=vec(..., ...)  
    L'=vec(..., ...)  
    if ..... :  
        p=.....  
    else :  
        p=.....
```

- 2 Écrire une fonction `TRec`, programmée en langage Python, qui fait appel à la fonction `rec`. `TRec` a pour arguments les coordonnées de trois points dans un repère orthonormé et renvoie le fait que le triangle formé par ces trois points est rectangle ou non.

III) Une démarche pour aborder le produit scalaire grâce à la physique

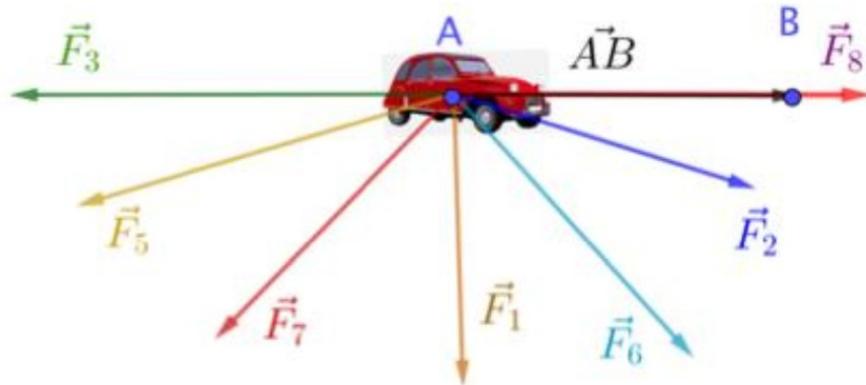
1) présentation et intuition

Sur le schéma ci-dessous, la voiture effectue un déplacement rectiligne de A vers B .

\vec{AB} représente le déplacement rectiligne de la voiture,

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_8$ représentent différentes forces appliquées à la voiture.

Quelles forces favorisent le mouvement ? S'opposent au mouvement ?



2) le problème du halage

Le halage est un mode de traction terrestre des péniches, des coches d'eau et d'une manière générale des bateaux fluviaux, qui consiste à les faire avancer le long d'une rivière, d'un canal, au moyen d'une corde tirée jadis à force de bras ou par des chevaux, à présent par un engin automoteur. *Source wikipedia*

Pour une longueur de corde donnée, expliquer comment doivent être positionnés des chevaux sur la rive par rapport au bateau tracté pour que la traction soit la plus efficace ?

Objectif (pour l'élève) : Réaliser un schéma légendé présentant les éléments utiles pour réaliser cette étude mécanique.

Objectifs pédagogiques :

- relier l'adjectif « efficace » à la grandeur « énergie »
- faire apparaître les vecteurs déplacement et force de traction
- lier la longueur de la corde à l'angle entre vecteurs, et faire apparaître l'idée de projection



3) composantes

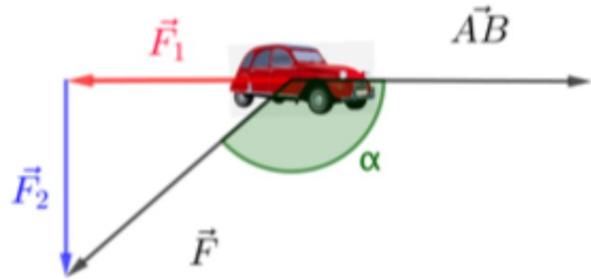
On s'intéresse maintenant à une seule force \vec{F} qui s'applique à la voiture (pouvant être le vent venant de derrière). Cette force \vec{F} est la résultante de deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 comme sur le schéma suivant (\vec{F}_1 tant de même direction que le déplacement de la voiture ; \vec{F}_1 et \vec{F}_2 ayant des directions perpendiculaires). Quelle composante de la force \vec{F} a une action sur le déplacement de la voiture ?



Objectif (élève) : proposer une équation pour évaluer l'énergie consommée lors du déplacement du véhicule

Objectifs pédagogiques :

- identifier les paramètres – norme de la force, longueur du déplacement
- effectuer une projection et établir une relation entre la norme de F et de F_1 .
- tester la relation obtenue dans des situations du premier document (180° , 90° ...).



sources :

. Fabrice Foucher, académie de Nantes, TRAAM 2020-21, une introduction au produit scalaire

https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/medias/fichier/modeliser-et-produit-scalaire_1619773858433-pdf?ID_FICHE=1424110237286&INLINE=FALSE

. Géométrie pour toutes et pour tous, le produit scalaire, eduscol, 2020, mathématiques
<https://eduscol.education.fr/document/24589/download>

IV) application bidisciplinaire

document 1 : description du dispositif

La ligne 2 du Funiculaire de Lyon est plus communément appelée Funiculaire ou « Ficelle » de Fourvière. Son tracé est assez rectiligne.

La ligne F2 est majoritairement souterraine et en pente ; sa longueur totale est de 427 mètres et possède un dénivelé de 116 mètres entre ses deux terminus.

La ligne débute au pied de la colline à la station « Vieux Lyon - Cathédrale Saint-Jean » par une voie unique encadrée de deux quais, l'un pour la montée des voyageurs et l'autre pour la descente, et se finit à la station « Fourvière », située en souterrain en face de la basilique.

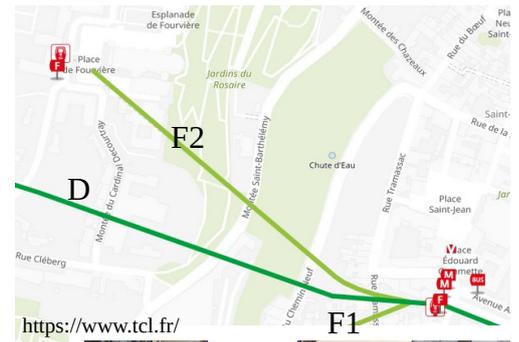
Le parcours complet de la ligne demande seulement deux minutes. Le trajet est assuré par une machinerie principalement constituée d'un treuil.

Le matériel roulant actuel est une rame mono-caisse possédant un pantographe pour l'alimentation électrique des équipements embarqués.

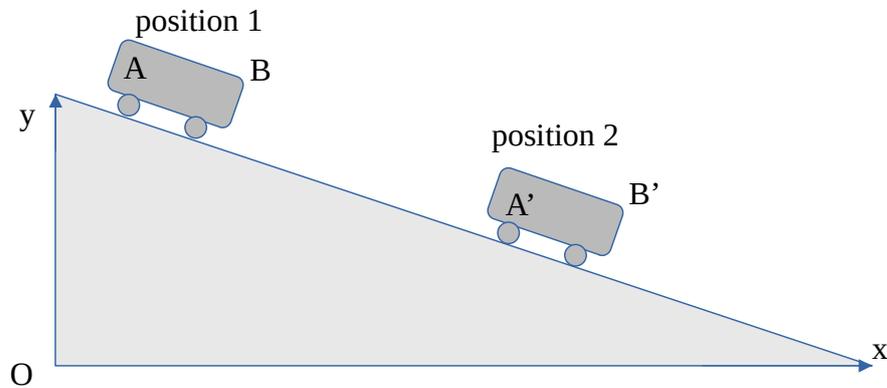
Caractéristiques :

- Masse à vide : 7 tonnes ;
- Capacité totale : 70 places, dont 19 assises.

d'après : fr.wikipedia.org



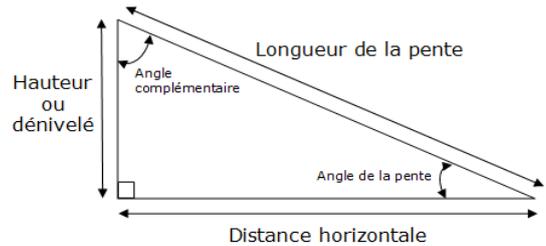
document 2 : schéma



document 3 : pente

En topographie, lorsque l'on parle de l'inclinaison d'un terrain, d'une route, d'une voie de chemin de fer, etc, on utilise la notion de pente exprimée en pourcentage plutôt que d'angle exprimé en degrés. C'est la même notion de pente qui est utilisée pour exprimer l'inclinaison d'une toiture, d'une descente de garage ou d'un escalier.

La pente exprime l'inclinaison d'une surface par rapport à l'horizontale. Elle est le rapport entre le dénivelé (hauteur) et la distance horizontale.



Partie A- solide en mouvement : modélisation physique de la situation

La rame du funiculaire est un système complexe qui n'est pas homogène et dont la masse n'est pas constante (elle dépend du nombre de passagers). La trajectoire du funiculaire n'est pas parfaitement rectiligne, néanmoins on la suppose comme telle. Ainsi, on modélise la rame par un solide homogène et on suppose qu'elle se déplace sur un support rectiligne. C'est ce système qu'on étudie.

Dans ces conditions :

- A1. Si on suppose la rame homogène, où se trouve son centre d'inertie ?
- A2. Tracer les vecteurs déplacements des points A, B et G entre les 2 positions du document 2.
- A3. Choisissez deux mots pour décrire le mouvement parmi : parabolique, circulaire, rectiligne, curviligne, translation, rotation.
- A4. Exploiter les documents pour...
 - a) ... montrer que l'angle de la pente vaut $\theta = 15,76^\circ$ puis vérifier que la pente moyenne vaut environ 28 % ;
 - b) ... calculer la vitesse moyenne de la rame sur le trajet entre les deux stations, exprimée en m/s.

Conclusion : comment modéliser la rame du funiculaire ?

Partie B- étude vectorielle :

Dans cette partie nous utilisons un document Geogebra pour visualiser et vérifier les valeurs obtenues par le calcul.

https://www.geogebra.org/calculator_fqbcrtsz

B1. Placer sur Geogebra les points correspond à la station Fourvière, notée F (0 ; 116) et de la station Vieux Lyon, notée V (410,95 ; 0) et O (0 ; 0).

L'outil point permet de le créer. L'onglet algèbre permet de vérifier ou modifier ses coordonnées.

B2. Dans le repère cartésien de la figure du document 2, exprimer les coordonnées du vecteur déplacement \vec{FV} entre ces deux stations ?

En déduire la norme du vecteur \vec{FV} .



Autocorrection : vérifier votre travail avec les outils vecteur et segment de Geogebra.

B3. Tracer la projection de \vec{FV} sur l'axe des abscisses.

Calculer la projection $\|\vec{FV}\| \cdot \cos \theta$; θ étant l'angle entre l'axe des abscisses et \vec{FV} .

B4. Sur Geogebra, placer au point F les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -116,7 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -30,5 \\ 8,6 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 108,1 \end{pmatrix}$ en

ajoutant les points A(0 ; -0,7) ; B(-30,5 ; 124,6) et C(30,5 ; 224,1)

B5. Calculer le produit scalaire $\vec{FV} \cdot \vec{u}$ et retrouver la valeur θ .

B5. Calculer l'angle $\alpha = (\vec{FV}; \vec{w})$.

B6. Calculer l'angle $\beta = (\vec{FV}; \vec{v})$.

B7. Autocorrection : Mesurer ces angles sous Geogebra (outil angle) pour vérifier vos calculs.

Conclusion : Associer les vecteurs \vec{u} ; \vec{v} et \vec{w} aux forces de frottement, au poids et à la réaction normale du support.

Compléter le titre de la partie.

Partie C – Coût d'un trajet : étude énergétique des forces inclinées

On étudie la descente de la rame depuis Fourvière. Le trajet s'effectue à vitesse constante.

C1. Établir la liste des forces subies par le système.

Préciser leurs caractéristiques : direction, sens et norme (expression) et les schématiser sans soucis d'échelle.

C2. Calculer la norme du poids en considérant que la rame est remplie de personnes de 70 kg.

C3. Ecrire le principe d'inertie sur un axe perpendiculaire au rail. En déduire la norme de la réaction normale en utilisant le principe d'inertie (première loi de Newton).

C4. Ecrire le principe d'inertie en projection sur la direction du rail ? En déduire la norme T de la traction du treuil.

C5. Calculer le travail de chacune des trois forces entre les deux stations. Quelle est leur unité ? Pour chacun, préciser s'il est moteur, résistant ou nul.

C.6. Calculer le coût d'un trajet, sachant que prix de distribution de l'électricité est fixé à 0,226 euro/kWh.

Donnée : 1Wh = 3600 J

Conclusion

Quel lien effectuer entre la modélisation physique et mathématique ?

Partie D – A quel point freiner fort si on laisse glisser la rame ?

Réaliser l'activité suivante : <https://capitale2.ac-paris.fr/web/c/77b1-1772173>

Conclusion :

Quelle est l'utilité de ce programme pour développer un algorithme de contrôle de la rame de funiculaire ?

Compléter le titre de la partie.

