Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

**Olympiades académiques de mathématiques 2022**

---

# Académie de Rennes

Mercredi 9 mars 2022

# Exercices académiques

Éléments de correction

# Exercice académique n°1 – 2022, année stylée

**Partie I**

**1)** $(23\,;7\,;38)$ n'est pas un triplet stylé car les nombres ne sont pas écrits dans l'ordre croissant.
Le triplet $(10\,;25\,;36)$ n'est pas stylé car $10^2+25^2+36^2=2021\neq 2022$.
Le triplet $(7\,;23\,;38)$ est stylé car 7, 23 et 38 sont des entiers naturels tels que $7\leq 23\leq 38$ et $7^2+23^2+38^2=2022$.

**2)** Si le triplet de la forme $(m\,;m\,;m)$ est stylé alors $3m^2=2022$ soit $m^2=674$. Or $25<\sqrt{674}<26$ donc *m* n'est pas un entier. Il n'existe donc pas de triplets stylés de la forme $(m\,;m\,;m)$.

**3)** Un triplet stylé de la forme $(0\,;n\,;p)$ doit vérifier : *n* et *p* sont des entiers naturels tels que $n\leq p$ et $n^2+p^2=2022$. On a donc $p^2=2022-n^2$ soit encore $p=\sqrt{2022-n^2}$ avec $n\leq\sqrt{2022}$ soit $n\leq 44$. On recherche donc des entiers naturels *x* inférieurs ou égaux à 44 dont l'image par la fonction $f$ définie par $f(x)=\sqrt{2022-x^2}$ est un entier supérieur ou égal à *x*. Le tableur de la calculatrice permet d'affirmer que c'est impossible. Il n'existe donc pas de triplet stylé de la forme $(0\,;n\,;p)$.

**4)** On procède comme au 3) avec la fonction $g$ définie par $g(x)=\sqrt{2021-x^2}$. $g(x)$ doit être un entier supérieur ou égal à *x*. Le tableur de la calculatrice permet d'affirmer que c'est impossible. Il n'existe donc pas de triplet stylé de la forme $(1\,;n\,;p)$.

**5)** Gwénolé sait sans aucun calcul que le triplet $(10\,;25\,;36)$ n'est pas stylé car 25 est le seul nombre impair les deux autres sont pairs donc d'après les propriétés admises $10^2$ et $36^2$ sont pairs et $25^2$ est impair. Ainsi $10^2+25^2+36^2$ est impair et ne peut pas être égal à 2022, nombre pair. Gwénolé en déduit sans calcul que le triplet $(10\,;25\,;36)$ n'est pas stylé.

**Partie II**

**1)** Soit $(m\,;n\,;p)$ un triplet quelconque stylé. Si parmi les trois nombres *m*, *n* et *p* deux sont pairs et le troisième impair alors parmi $m^2$, $n^2$ et $p^2$ deux sont pairs et le troisième impair ; leur somme est donc impaire ce qui est impossible.

**2)** Si les trois nombres *m*, *n* et *p* sont impairs alors $m^2$, $n^2$ et $p^2$ le sont aussi ainsi que leur somme qui ne peut donc pas être égale à 2022, nombre pair.

**3)** Si les trois nombres *m*, *n* et *p* sont pairs alors $m^2$, $n^2$ et $p^2$ sont des multiples de 4 ainsi que leur somme qui ne peut donc pas être égale à 2022, nombre non multiple de 4.

**4)** On peut conclure alors que dans tout triplet stylé un seul nombre est pair.

**5)** D'après la question 4), les trois nombres d'un triplet stylé sont de la forme $2u+1$, $2v+1$ et $2w$ avec *u*, *v* et *w* des entiers naturels. On a donc $(2u+1)^2+(2v+1)^2+(2w)^2=2022$ puis, en développant, $4u^2+4u+4v^2+4v+4w^2=2020$ soit encore $u^2+u+v^2+v+w^2=505$.
On remarque que $u^2+u$ est pair puisque $u^2$ et *u* ont la même parité d'après le rappel, idem pour $v^2+v$ donc $w^2$ est impair car 505 l'est ; ainsi *w* est impair et le nombre pair est de la forme $2\times$ (nombre impair).
En conclusion, dans un triplet stylé le seul nombre pair est de la forme $4a+2$, avec *a* entier, donc n'est pas un multiple de 4.

NB : On aurait pu aussi raisonner par l'absurde.

**Partie III**

**1)**
**a)** Le triplet $(m\,;n\,;p)$ est stylé donc $m\leq n\leq p$ ; on a alors $m^2\leq n^2\leq p^2$ donc $m^2+m^2+m^2\leq m^2+n^2+p^2$ soit encore $3m^2\leq 2022$. On peut en déduire que $m\leq\sqrt{674}$. Or $\sqrt{674}\approx 25{,}96$ donc la plus grande valeur possible de *m* est 25.
D'après les questions 3 et 4 de la partie I, on en déduit alors $2\leq m\leq 25$.
**b)** La plus grande valeur possible de *p* sera obtenue lorsque $m=2=n$ donc $8+p^2\leq 2022$ soit $p\leq\sqrt{2014}$ ; la plus grande valeur possible de *p* est donc 44. On a $m^2\leq n^2\leq p^2$ donc $m^2+n^2+p^2\leq p^2+p^2+p^2$ soit encore $2022\leq 3p^2$; on peut en déduire que $\sqrt{674}\leq p$ ; or $\sqrt{674}\approx 25{,}96$ donc la valeur minimale de *p* est 26. On en déduit $26\leq p\leq 44$.
**c)** La plus grande valeur possible de *n* sera obtenue lorsque $m=2$ et $n=p$ donc $4+2n^2\leq 2022$ soit $n\leq\sqrt{1009}$ ; la plus grande valeur possible de *n* est donc 31. La plus petite valeur possible de *n* sera obtenue lorsque $m=n$ et $p$ maximum donc $2n^2+44^2\geq 2022$ soit $n\geq\sqrt{43}$ ; la plus petite valeur possible de *n* est donc 7. On en déduit $7\leq n\leq 31$.

**2)** On sait que $2 \leq m \leq 25$ donc il y a 25-2+1 possibilités pour $m$ soit 24 possibilités. De même, il y a 25 possibilités pour $n$ et 19 possibilités pour $p$. Comme $24 \times 25 \times 19 = 11\,400$, il y a $11\,400$ triplets possibles.

**3)** sur casio :

```
======2022      ===
1→M:1→N:1→P↵
For 2→M To 25↵
For M→N To 31↵
For N→P To 44↵
If M²+N²+P²=2022↵
Then ↵
Goto 1↵
Else ↵
Goto 2↵
IfEnd↵
Lbl 1↵
M↵
N↵
P↵
Lbl 2↵
Next↵
Next↵
Next↵
```

sur TI (TI-Basic):

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
ÉDIT MENU: [alpha] [f5]
PROGRAM:STYLE22
:For(M,2,25)
:For(N,M,31)
:For(P,N,44)
:If M²+N²+P²=2022
:Then
:Disp M,N,P,","
:End
:End
:End
:
```

sur Numworks (Python):

```
deg                PYTHON
1 from math import *
2 for M in range(2,26):
3   for N in range (M,32):
4     for P in range(N,45):
5       if M**2+N**2+P**2==2022:
6         print(M,N,P)
7
```

```
deg                PYTHON
>>> from style2022 import *
2 13 43
5 29 34
7 23 38
10 31 31
11 26 35
13 22 37
17 17 38
>>>
```

On obtient les sept triplets stylés suivants : $(2\,;13\,;43)$, $(5\,;29\,;34)$ , $(7\,;23\,;38)$ , $(10\,;31\,;31)$, $(11\,;26\,;35)$ , $(13\,;22\,;37)$ et $(17\,;17\,;38)$.

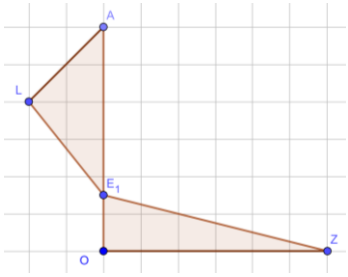
# Exercice académique n°2 – Zoé et Léa chez ZOLA

**1) <u>Cas n°1</u>** :

L'aire du triangle $ZOE_1$ est : $\frac{OZ\times OE_1}{2} = \frac{6\times 1{,}5}{2} = 4{,}5m^2$.

On observe que le côté $[E_1A]$ mesure 4,5$m$ et que la hauteur relative à ce côté mesure 2$m$. L'aire du triangle $LE_1A$ est donc : $\frac{4{,}5\times 2}{2} = 4{,}5m^2$.

Les deux parcelles ont la même aire, aucune des deux amies n'est donc lésée dans ce cas.

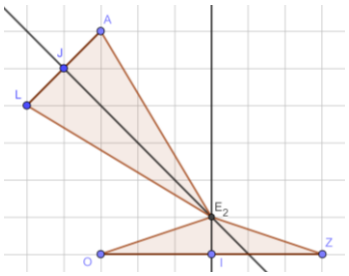



**2) <u>Cas n°2</u>** :

On sait qu'un triangle est isocèle si et seulement si son sommet est sur la médiatrice du côté opposé.

On observe que les médiatrices des segments $[LA]$ et $[OZ]$ sont sécantes en un point situé à l'intérieur de $ZOLA$, donc le point $E_2$ existe bien.

Il semble que dans ce cas Zoé est lésée.

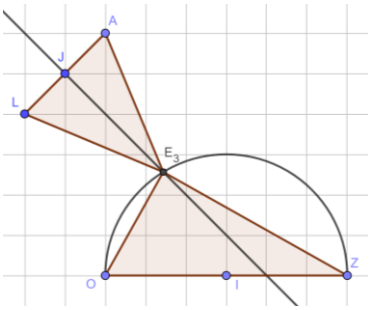



**3) <u>Cas n°3</u>** :

Le triangle $ZOE_3$ est rectangle en $E_3$ si le point $E_3$ est sur le cercle de diamètre $[OZ]$, d'après le premier rappel.

On observe que la médiatrice du segment $[LA]$ et le cercle de diamètre $[OZ]$ se coupent en un point dans $ZOLA$. Le point $E_3$ existe donc bien.

Il semble que dans ce cas c'est Léa qui est lésée.

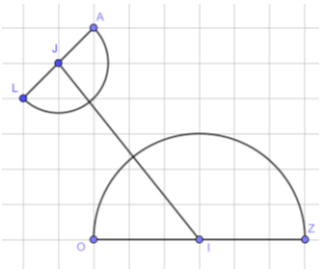



**4) <u>Cas n°4</u>** :

Pour que les triangles $LEA$ et $ZOE$ soient rectangles en $E$ il faudrait que le point $E$ soit sur le cercle de diamètre $[LA]$ et sur le cercle de diamètre $[OZ]$.

Or ces deux cercles n'ont pas de point d'intersection.

*On valorisera les copies où figurent des éléments du style : la distance $[IJ]$ est supérieure à la somme des rayons des deux cercles.*




**5) a)** On a : $AE = \sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2} = \sqrt{x^2+(y-6)^2}$ et $LE = \sqrt{\left(x-(-2)\right)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$.

On obtient les égalités équivalentes suivantes :

$AE = LE$ ; $AE^2 = LE^2$ ; $x^2+(y-6)^2 = (x+2)^2+(y-4)^2$ ; $x^2+y^2-12y+36 = x^2+4x+4+y^2-8y+16$ ; $-12y+8y = 4x+20-36$ ; $-4y = 4x-16$ ; $y = -x+4$.

Le point $E$ appartient donc bien à la droite d'équation $y = -x + 4$.

**b)** La médiatrice du segment $[OZ]$ a pour équation $x = 3$.

**c)** Les coordonnées du point $E_2$ vérifient les deux équations $y = -x+4$ et $x = 3$. On en déduit : $E_2(3\,;1)$.

**d)** L'aire du triangle $ZOE_2$ est $\frac{ZO\times IE_2}{2} = \frac{6\times 1}{2} = 3$ m$^2$ et l'aire du triangle $LE_2A$ est égale à $\frac{LA\times JE_2}{2}$.

Calculons : $LA = \sqrt{(6-4)^2+(0-(-2))^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{2\times 4} = \sqrt{2}\times\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

et $JE_2 = \sqrt{(3-(-1))^2+(1-5)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{2\times 16} = 4\sqrt{2}$.

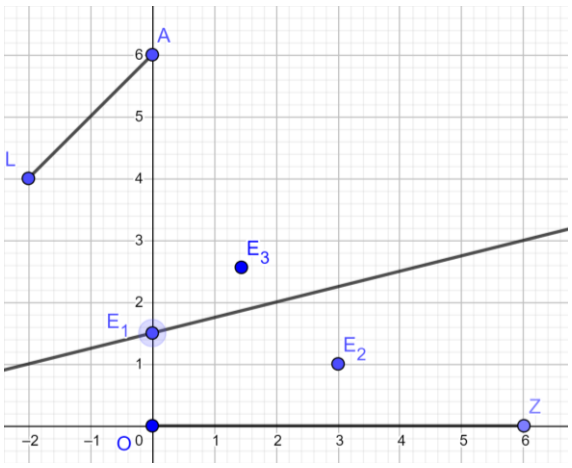
D'où, l'aire du triangle $LE_2A$ : $\frac{2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}{2} = 8\ \text{m}^2$.
Zoé se trouve particulièrement lésée puisque la parcelle de Léa est plus de deux fois plus grande que la sienne. Ceci avait été conjecturé à la question **2)**.

**6) a)** Le point $E_3$ est sur le cercle de centre $I$ et de rayon 3. Il vérifie donc la condition : $E_3I = 3$ soit encore $E_3I^2 = 9$, ce qui s'écrit aussi $(x-3)^2 + y^2 = 9$.
**b)** Le point $E_3$ est sur la médiatrice du segment $[LA]$, donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = -x + 4$. Si on remplace $y$ par son expression en fonction de $x$ dans l'équation de la question précédente on obtient successivement :
$(x-3)^2 + (-x+4)^2 = 9$ ; $x^2 - 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 = 9$ ; $2x^2 - 14x + 16 = 0$.
Ce qui s'écrit aussi $x^2 - 7x + 8 = 0$.
**c)** Résolvons l'équation ci-dessus.
$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 49 - 32 = 17$.
$\Delta > 0$ donc $x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{17}}{2\times 1} = \frac{7-\sqrt{17}}{2} \approx 1{,}44$ et $x_2 = \frac{7+\sqrt{17}}{2} \approx 5{,}56$.
La solution $x_2$ conduirait à une valeur négative de $y$, ce qui est exclu.
Donc l'ordonnée du point $E_3$, qui est aussi la hauteur du triangle $ZOE_3$ relative à la base $OZ$, vaut approximativement :
$-1{,}44 + 4 = 2{,}56$.
L'aire de la parcelle de Zoé serait alors à peu près de $\frac{2{,}56\times 6}{2} = 7{,}68\ \text{m}^2$.
Dans ce cas c'est Léa qui serait lésée, conformément à ce qui avait été conjecturé à la question **3)**.

**7) a)** La droite $(HE)$ est parallèle à la médiatrice de $[AL]$ dont l'équation réduite a été obtenue à la question **5) a)** : $y = -x + 4$.
Donc l'équation réduite de la droite $(HE)$ est de la forme : $y = -x + p$.
Le point $E(a\,;b)$ appartient à la droite $(HE)$ donc : $b = -a + p$, d'où : $p = a + b$.
L'équation réduite de la droite $(HE)$ est donc : $y = -x + a + b$.
Le point $H$ est l'intersection des droites $(AL)$ et $(HE)$, donc ses coordonnées vérifient : $y_H = x_H + 6$ et $y_H = -x_H + a + b$.
En sommant ces deux équations terme à terme on obtient $y_H = \frac{a+b+6}{2}$.
On en déduit $x_H = \frac{a+b-6}{2}$ et on a donc bien : $H\left(\frac{a+b-6}{2}\,;\,\frac{a+b+6}{2}\right)$.

**b)** Ni Zoé ni Léa ne sont lésées si les aires des triangles $ZOE$ et $LEA$ sont égales.
Or l'aire du triangle $ZOE$ est $3b$, et l'aire du triangle $LEA$ est : $\frac{LA\times HE}{2} = \sqrt{2}\,HE$.
Avec $HE = \sqrt{\frac{1}{4}((a-b+6)^2 + (-a+b-6)^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(a-b+6)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|a-b+6|$.
Or le point $E$ doit être « sous » la droite $(LA)$ d'équation $y = x + 6$, on a donc la condition : $b < a + 6$, soit $a - b + 6 > 0$.
Cela permet d'écrire : $HE = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b+6)$.
L'aire du triangle $LEA$ s'écrit alors : $a - b + 6$.
L'équité impose donc : $3b = a - b + 6$, soit $a - 4b + 6 = 0$, ou encore : $b = \frac{1}{4}a + \frac{3}{2}$.
L'équation réduite de la droite cherchée est donc $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ et on la trace sur l'annexe.

**Annexe à rendre**



# Exercice académique n°3 - Énigmes…

**I - Énigme 1**

**1)** On peut atteindre le score de 28 points de différentes manières : $2 \times 5 + 6 \times 3 = 28$ et $5 \times 5 + 1 \times 3 = 28$.

**2)** 1 ; 2 ; 4 et 7 ne sont pas des scores possibles alors que les scores 3, 5 et 6 le sont. De plus, on peut obtenir les scores 8 (=5+3), 9 (=3x3) et 10 (=5x2). A partir de là, en ajoutant 3, on obtient les scores 11 ; 12 et 13. Et ainsi de suite, en ajoutant 3. Tous les scores strictement supérieurs à 7 sont donc possibles. Seuls les scores 1 ; 2 ; 4 et 7 ne sont pas possibles.

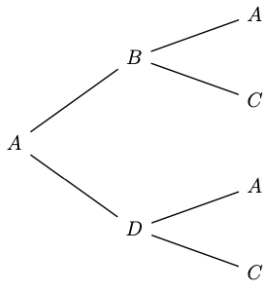
**II - Énigme 2**

$C \times F = 10^{13} = (2 \times 5)^{13} = 2^{13} \times 5^{13}$ ; or C et F ne sont pas divisibles par 10 donc ils ne peuvent pas contenir dans leur décomposition en facteurs premiers $2 \times 5$ et comme C < F alors on a nécessairement C = $2^{13}$ = 8192

**III - Énigme 3**

**1)** Une modélisation par arbres est possible.

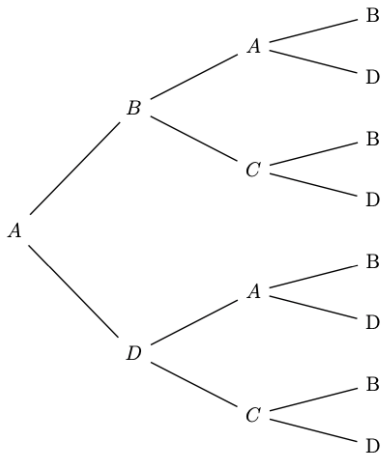
**a)**




2 issues sur 4 conduisent au point de départ (ici on a choisi A mais ce pourrait être n'importe quel point).

La probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{2}$

**b)**




En prolongeant l'arbre avec 3 lancers, en partant de A, on se rend compte que les points atteints sont :

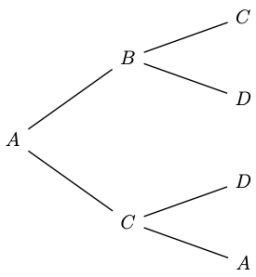
- B ou D (pour un nombre de lancers impair)
- A ou C (pour un nombre de lancers pair)

Donc après 7 lancers, si l'on est parti de A (par exemple), on arrive en B ou en D.

La probabilité cherchée est donc nulle.

**2)** Une modélisation par arbres est possible.

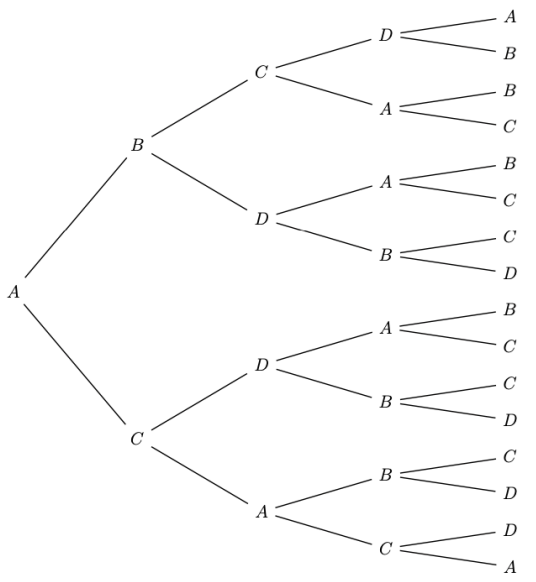
**a)**




Prenons A (par exemple) comme point de départ.

La probabilité cherchée est donc de $\frac{1}{4}$.

**b)**




En partant de A, la position d'arrivée la plus probable est le point C avec une probabilité égale à $\frac{6}{16}$.
Donc le plus probable est d'arriver au point diamétralement opposé.

Pour avoir le plus de chance d'arriver en A, il faut donc partir de C.

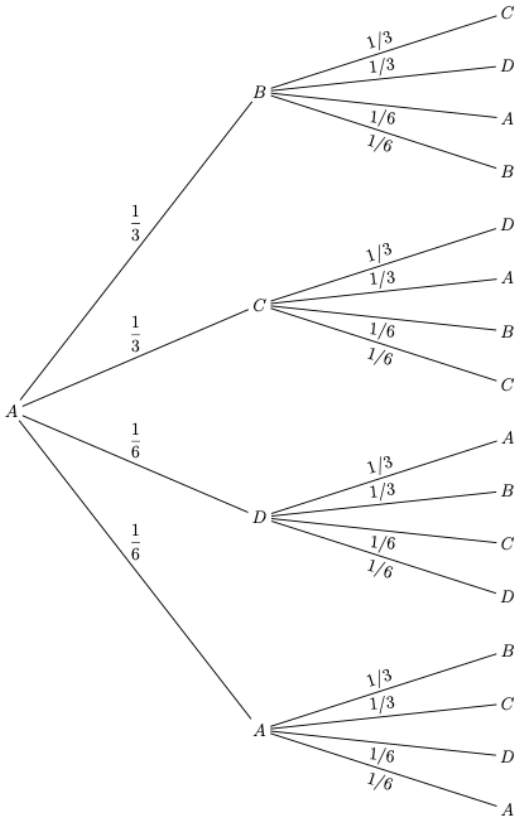
**3)**

<u>1re méthode</u>

On lance 2 fois le dé.
Les sommes des valeurs possibles sont donc les nombres de 2 à 12.

En « comptant » les déplacements sur le cercle (en partant par exemple de A), on constate que les valeurs qui nous ramènent en A sont 4 ; 8 et 12.

Or :
12 = 6 + 6.
8=2+6 ; 8 = 6+2 ; 8=3+5 ; 8=5+3 ; 8=4+4.
4=3+1 ; 4=1+3; 4=2+2.

Cela donne 9 possibilités sur 36 donc une probabilité égale à $\frac{1}{4}$

<u>2e méthode</u> : utilisation d'un arbre pondéré