

Équations et Équivalence

Fiche élève

Énoncé 1 :

Regrouper les équations qui ont les mêmes solutions.

$$\begin{array}{cccccc} x=2 & 12-4x=0 & 7x+4=4x-5 & 3x-(4+x)=0 & -5x=-10 \\ -\frac{1}{3}x=1 & (x+3)(x-2)=x^2-4 & x=-3 & \frac{7}{2}x=7 & (x-2)(x-5)=0 \end{array}$$

Définition :

Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

Énoncé 2 :

En utilisant le symbole d'équivalence, réécrire dans l'ordre les étapes de la résolution de l'équation :

$$3(4x+1)=x-(8-2x)$$

Les étapes :

$$9x=-11$$

$$12x+3=3x-8$$

$$x=-\frac{11}{9}$$

$$12x-3x+3=-8$$

$$12x+3=x-8+2x$$

Énoncé 3 :

Résoudre l'équation suivante :

$$(3x+4)(-2x+1)=0$$

Énoncé 4 :

Parmi ces raisonnements par équivalence, déterminer les raisonnements corrects.

$(x-2)^2=9$	$(x-7)^2=100$	$x^2+5x+18=x(5-x)$
$\Leftrightarrow x-2=3$	$\Leftrightarrow (x-7)^2-100=0$	$\Leftrightarrow x^2+5x+18=5x-x^2$
$\Leftrightarrow x=5$	$\Leftrightarrow (x-7-10)(x-7+10)=0$	$\Leftrightarrow 2x^2+18=0$
	$\Leftrightarrow (x-17)(x+3)=0$	$\Leftrightarrow 2x^2=-18$
	$\Leftrightarrow x=17 \text{ OU } x=-3$	$\Leftrightarrow x^2=-9$

Fiche professeur.e

Niveau :

Seconde et plus.

Durée :

Une heure ou deux selon l'avancement dans l'année.

But de l'activité :

Le but est de mettre en évidence le raisonnement par équivalence lors de résolutions d'équations en utilisant le symbole équivalence (ou pas). Il ne s'agit pas de travailler toutes les techniques de résolution ni de travailler sur la notation de l'ensemble des solutions.

Déroulé :

Afin d'alléger les calculs, et permettre des échanges, on pourra faire travailler les élèves en groupe.

Énoncé 1 :

Remarque : la définition d'équations équivalentes pourra n'être fournie qu'à l'issue de l'exercice. En conclusion de l'exercice il nous paraît important que soit énoncée la proposition suivante :

*Deux équations sont **équivalentes** lorsque « on peut passer de l'une à l'autre » par une opération conservant l'égalité :*

Ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres de l'égalité (transposer).

Diviser ou multiplier par un même nombre non nul les deux membres de l'égalité.

L'enseignant pourra à sa guise donner directement cette proposition ou la faire émerger.

Vocabulaire :

Il faudra certainement préciser aux élèves que « l'équation 1 est équivalente à l'équation 2 » peut s'écrire « équation 1 équivaut à équation 2 » ou « équation 1 $\Leftrightarrow$ équation 2 ». Dans la suite nous avons fait le choix d'utiliser le symbole.

Énoncé 2 :

Les deux premières équivalences proviennent d'égalités algébriques. Ce type d'équivalence ne va pas de soi pour tous les élèves : elle ne correspond pas aux critères usuels d'équations équivalentes.

Il peut y avoir confusion entre égalité et équivalence. Il arrive que des élèves écrivent des égalités à la suite :

$$12x+3=x-8+2x=3x-8=3x-8-3=3x-11$$

Pour éviter ce type d'erreur, on préférera la rédaction en **colonne** avec le symbole équivalence.

Énoncé 3 :

On pourra faire le point sur les différentes rédactions et le vocabulaire utilisés et insister sur le fait que dans tous les cas, il s'agit d'une équivalence. On demandera aux élèves d'utiliser le symbole d'équivalence et le connecteur logique *OU*.

$$(3x+4)(-2x+1)=0 \Leftrightarrow 3x+4=0 \text{ OU } -2x+1=0$$

Énoncé 4 :

Un des objectifs de l'exercice est de travailler la justification des équivalences en identifiant les opérations.

La première résolution contient une erreur de raisonnement.

La deuxième présente un raisonnement correct.

La troisième aussi et démontre que l'équation n'a pas de solution.

A propos des énoncés :

Nous avons choisi des équations avec des calculs simples afin de ne pas perturber le message sur les équivalences.

Prérequis :

Calcul algébrique, équations du premier degré, équations produit nul.

On pourra s'appuyer sur la fonction carré dont l'étude commence en troisième.

Lien avec le programme, mots-clés :

Équations, raisonnement.

Prolongement :

On pourra prolonger ce travail à l'aide d'automatismes du type :

vrai /faux : $x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \text{ OU } x=-3$

La représentation graphique de la fonction carré est un outil pour convaincre certains élèves.

On pourra réinvestir le raisonnement par équivalence avec :

les inéquations

les systèmes

les résolutions d'équations et d'inéquations avec les fonctions usuelles : exp, ln et trigonométriques (en première et terminale).