# Exemple de progression de Mathématiques Expertes

| Chapitres | Contenus | Relation avec l'enseignement de spécialité, prérequis | Démonstrations | Problèmes possibles Algorithmique |
|---|---|---|---|---|
| **Complexes - Equations polynomiales 1** | Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.<br>Partie réelle et partie imaginaire, conjugué.<br>Opérations $+ - \times$, conjugaison : propriétés algébriques.<br>Image d'un nombre complexe. Image du conjugué.<br>Affixe d'un point, d'un vecteur.<br>Inverse d'un nombre complexe non nul.<br>Quotient de nombres complexes.<br>Solutions complexes d'une équation du $2^{nd}$ degré à coefficients réels. | | Conjugué du produit, d'un inverse, d'une puissance entière. | Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes. |
| **Arithmétique 1** | Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.<br>Division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{N}^*$.<br>Congruences dans $\mathbb{Z}$.<br>Compatibilité des congruences avec les opérations. | Raisonnement par récurrence. | | Problèmes de codage (code barres, ISBN...). |
| **Complexes - Equations polynomiales 2** | Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.<br>Relation $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$.<br>Module d'un produit, d'un inverse.<br>Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.<br>Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse.<br>*Racines n-ièmes de l'unité :*<br>*cas particuliers* $n=2$ *;* $n=4$ *puis* $n=3$.<br>Factorisation de $z^n - a^n$ par $z-a$.<br>Si P est un polynôme et $\mathrm{P}(a)=0$, factorisation de P par $z-a$.<br>Un polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines. | | Formule $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$.<br>Module d'un produit, d'une puissance.<br>Factorisation de $z^n - a^n$ par $z-a$ et de P par $z-a$ si $\mathrm{P}(a)=0$.<br>Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré. | Formules de Viète.<br><br>Résolution par radicaux de l'équation de degré 3. |
| **Graphes 1** | Graphe, sommets, arêtes. Graphe complet.<br>Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe.<br>Matrice d'adjacence d'un graphe (lignes, colonnes d'une matrice) | | | Étude de graphes eulériens |

| Chapitres | Contenus | Relation avec l'enseignement de spécialité, prérequis | Démonstrations | Problèmes possibles<br>Algorithmique |
|---|---|---|---|---|
| **Matrices 1** | Notion de matrice (tableau de nombres réels).<br>Matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne.<br>Opérations. Puissances d'une matrice carrée.<br>Calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3. | | Expression du nombre de chemins de longueur $n$ reliant deux sommets d'un graphe à l'aide de la puissance $n$-ième de la matrice d'adjacence. | |
| **Arithmétique 2** | PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide.<br>Couples d'entiers premiers entre eux.<br>Théorème de Bézout.<br>Théorème de Gauss. | | Ecriture du PGCD de $a$ et $b$ sous forme $ax+by$ , $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.<br>Théorème de Gauss. | Algorithme d'Euclide et calcul d'un couple de Bézout ( *Algo* ) .<br>Détermination des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.<br>Problèmes de chiffrement ( *Algo* ) : affine, Vigenère |
| **Complexes - Equations polynomiales 3** | Arguments d'un élément de $\mathbb{U}$.<br>Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire.<br>Arguments d'un nombre complexe non nul.<br>Interprétation géométrique. Forme trigonométrique.<br>Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c-a}{d-a}$ . | A partir des connaissances de première : cercle trigonométrique, valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus | Formule d'addition | Suite de nombres complexes définie par $z_{n+1}=az_n+b$ .<br>Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité.<br>Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot, d'ensembles de Julia. |
| **Matrices 2** | Exemples de représentations matricielles : transformations géométriques du plan ; suites récurrentes.<br>Inverse d'une matrice ; systèmes linéaires.<br>Suite de matrices colonnes $(\mathrm{U}_n)$ vérifiant une relation de récurrence du type $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n+\mathrm{C}$ . | Suites réelles : comportement asymptotique | | Interpolation polynomiale.<br>Modèle « proie-prédateur » discrétisé.<br>Marche aléatoire sur un graphe, étude asymptotique. |
| **Complexes - Equations polynomiales 4** | Exponentielle imaginaire, notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ . Relation fonctionnelle.<br>Forme exponentielle d'un nombre complexe.<br>Racines $n$-ièmes de l'unité.<br>Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n$-ièmes de l'unité.<br>Représentation géométrique. | | Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ . | Lignes trignonométriques de $\frac{2\pi}{5}$ , construction du pentagone régulier.<br>Somme des racines $n$-ièmes de l'unité.<br>Racines $n$-ièmes d'un nombre complexe.<br>Transformation de Fourier discrète |

| Chapitres | Contenus | Relation avec l'enseignement de spécialité, prérequis | Démonstrations | Problèmes possibles Algorithmique |
|---|---|---|---|---|
| **Arithmétique 3** | Nombres premiers. Leur ensemble est infini.<br>Existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.<br>Petit théorème de Fermat. | | L'ensemble des nombres premiers est infini. | Crible d'Ératosthène ( *Algo* ).<br>Décomposition en produit de facteurs premiers ( *Algo* ).<br>Démonstrations du petit théorème de Fermat.<br>Tests de primalité : témoins de primalité, nombres premiers particuliers.<br>Problèmes de chiffrement ( *Algo* ) : Hill, RSA.<br>Triplets pythagoriciens.<br>... |
| **Graphes 2** | Graphe orienté pondéré associé à une chaîne de Markov à deux ou trois états.<br>Chaîne de Markov à deux ou trois états : distribution initiale représentée par une matrice ligne $\pi_0$.<br>Matrice de transition P, graphe pondéré associé.<br>Interprétation du coefficient $(i, j)$ de $P^n$, distribution après $n$ transitions, représentée comme la matrice ligne $\pi_0 P^n$.<br>Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à 2 ou 3 états. | | Pour une chaîne de Markov, expression de la probabilité de passer de l'état $i$ à l'état $j$ en $n$ transitions, de la matrice ligne représentant la distribution après $n$ transitions. | Modèle de diffusion d'Ehrenfest.<br>Algorithme PageRank. |
| **Complexes - Equations polynomiales 5** | Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.<br>Formules d'Euler : $\cos(\theta)=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$ ; $\sin(\theta)=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$.<br>Formule de Moivre : $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$. | Coefficients binomiaux, relation de Pascal.<br>Calcul intégral. | Formule du binôme. | Linéarisation, recherche de primitives, calcul de puissances... |