

# Un exemple de progression de l'enseignement de spécialité mathématiques en terminale

| Chapitres                                                                 | Contenus                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Démonstrations                                                                                                                                               | Algorithmes                                                                         | Histoire des maths                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Vecteurs, droites et plans de l'espace 1</b><br><br>2 semaines         | Vecteurs de l'espace. Translations.<br>Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.<br>Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.<br>Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.<br>Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur dans une base.<br>Représentation paramétrique d'une droite. |                                                                                                                                                              |                                                                                     | Vecteurs comme modèles en physique dynamique : composition de forces (Newton), vitesse (Leibniz)<br>Vecteur comme objet algébrique et géométrique au XIXe (transformation, repérage)                                            |
| <b>Suites 1</b><br><br>2 semaines                                         | Suite tendant vers $+\infty$ . Cas des suites croissantes non majorées.<br>Suites tendant vers $-\infty$ .<br>Suite convergente.<br>Opérations sur les limites.<br>Raisonner par récurrence.<br>Comportement d'une suite géométrique $(q^n)$ où q est un nombre réel.                                                                                                | Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ .<br>Limite de $(q^n)$ , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.              | Recherche de seuils                                                                 | Raisonnement par récurrence formalisé comme principe fondamental de raisonnement pas Pascal et surtout Peano et ses collaborateurs.<br>Mode de démonstration anticipé par des mathématiciens anciens, médiévaux et renaissants. |
| <b>Combinatoire et dénombrement 1</b><br><br>1,5 semaine                  | Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.<br>Principe multiplication : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments.<br>Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de $\{0,1\}$ , les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments.          | Démonstration par dénombrement de la relation $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .                                                                            | Génération des parties à 2 ou 3 éléments d'un ensemble fini.                        | Combinatoire comme récréation mathématique dès l'antiquité et encore présentes chez des arithméticiens au XIXe                                                                                                                  |
| <b>Suites 2</b><br><br>1,5 semaine                                        | Limites et comparaison. Théorème des gendarmes.<br>Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.                                                                                                                                                                                                                               | Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$ .<br>Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle. | Recherche de valeur approchée de $\pi$ , e, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , $\ln(2)$ , ... |                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Continuité des fonctions d'une variable réelle</b><br><br>2,5 semaines | <i>Retour les dérivées</i><br>Composée de deux fonctions. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la composée de deux fonctions dérivables.<br>Fonction continue en un point, sur un intervalle.<br>Toute fonction dérivable est continue.<br>Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.                  | Méthode de dichotomie<br>Méthode de Newton, méthode de la sécante                                                                                            |                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Vecteurs, droites et plans de l'espace 2</b><br><br>2 semaines         | Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.<br>Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                              |                                                                                     | Structure d'espace vectoriel établie fin du XIXe                                                                                                                                                                                |

| Chapitres                                                                      | Contenus                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Démonstrations                                                                                                                                 | Algorithmes                                                                                                                | Histoire des maths                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Compléments sur la dérivation</b><br>1,5 semaine                            | Dérivée seconde d'une fonction.<br>Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes.<br>Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la croissance de $f'$ et la positivité de $f''$ .<br>Point d'inflexion.                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Si $f''$ est positive, alors la courbe représentative de $f$ est au-dessus de ses tangentes.                                                   |                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli</b><br>1,5 semaine | Modèle de la succession d'épreuves indépendantes<br>Représentation par un produit cartésien, par un arbre.<br>Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli.<br>Schéma de Bernoulli : répétition de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes.<br>Lien entre le nombre des parties d'un ensemble à $n$ éléments et les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de $n$ épreuves de Bernoulli.<br>Loi binomiale $B(n, p)$ : loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.<br>Explicitation pour $k = 0, 1, 2$ . Symétrie. Relation et triangle de Pascal. | Démonstration de la relation de Pascal par une méthode combinatoire<br>Expression de la probabilité de $k$ succès dans le schéma de Bernoulli. | Simulation de la planche de Galton.<br>Problème de surréservation<br>Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire. | Première étude de la distribution binomiale : Ars Conjectandi (1713) de Bernoulli. Cet ouvrage contient la loi des grands nombres, qui relie fréquence et probabilités, valide le principe de l'échantillonnage et est le 1 <sup>er</sup> exemple de « théorème limite » en théorie des probabilités. |
| <b>Limites de fonctions</b><br>2 semaines                                      | Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ , en $-\infty$ , en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.<br>Limites faisant intervenir des fonctions de références étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.<br>Limites et comparaison.<br>Opérations sur les limites.                                                                                                                                                                                                                                         | Croissance comparée de $x \rightarrow x^n$ et $\exp$ en $+\infty$                                                                              |                                                                                                                            | Fondations solides posées dans la cours d'analyse de Cauchy (1821, 1823).                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Orthogonalité et distances dans l'espace 1</b><br>1 semaine                 | Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace, bilinéarité, symétrie.<br>Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.<br>Base orthonormée. Repère orthonormé.<br>Coordonnée d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points.<br>Développement de $\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2$ , formules de polarisation.                                                                                                                                                                  | Le projeté orthogonal d'un point $M$ sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de $M$ .                           |                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Primitives, équations différentielles 1</b><br>1 semaine                    | Équations différentielles $y' = f$ . Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle.<br>Deux primitives d'une même fonction continues sur un intervalle diffèrent d'une constante.<br>Primitives des fonctions de référence : $x \rightarrow x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ , $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ , exponentielle.                                                                                                                                                                                                                                          | Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.                                                      |                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Combinatoire et dénombrement 2</b>                                          | Nombre des $k$ -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à $n$ éléments. Définition de $n!$ Nombre de permutations d'un ensemble fini à $n$ éléments.<br>Combinaisons de $k$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments : parties à $k$ éléments de l'ensemble. Représentations en terme de mots ou de chemins.                                                                                                                                                                                                                                                                             | Démonstration de la relation de Pascal par calcul.                                                                                             | Pour un entier $n$ donné, génération de la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la                            | Propriétés arithmétiques du triangle de Pascal dans les mathématiques indiennes et chinoises .                                                                                                                                                                                                        |

| Chapitres                                                       | Contenus                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Démonstrations                                                                                                          | Algorithmes                                                                                                                                                                | Histoire des maths                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1,5 semaine                                                     | Pour $0 \leq k \leq n$ , formules $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$<br>Explication pour $k = 0, 1, 2$ . Symétrie. Relation et triangle de Pascal.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                         | relation de Pascal.<br>Génération des permutations d'un ensemble fini ou tirage aléatoire d'une permutation.<br>Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini. | Développement récent des mathématiques discrètes motivé notamment par l'informatique et l'intelligence artificielle.                                                                             |
| <b>Primitives, équations différentielles 2</b><br>1,5 semaine   | Équation différentielle $y' = ay$ , où $a$ est un réel ; allure des courbes.<br>Équation différentielle $y' = ay + b$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a$ est un nombre réel.                                            | Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$ , de $y' = ay + b$                                                                                                           | La résolution des équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques, se structure notamment en lien avec les séries (Newton, Euler, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati) |
| <b>Orthogonalité et distances dans l'espace 2</b><br>2 semaines | Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.<br>Vecteur normal à un plan. Étant donné un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$ , plan passant par A et normal à $\vec{n}$ .<br>Équation cartésienne d'un plan.<br>Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A.                                     |                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Fonction logarithme</b><br>1,5 semaine                       | Fonction logarithme népérien, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.<br>Propriétés algébriques du logarithme.<br>Fonction dérivée du logarithme, variations.<br>Limites en 0, en $+\infty$ , courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielles.<br>Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \rightarrow x^n$ en 0 et en $+\infty$ .                                                                                                                                                                                                    | Calcul de la fonction dérivée du logarithme népérien, la dérivée étant admise.<br>Limite en 0 de $x \rightarrow \ln(x)$ | Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Somme de variables aléatoires</b><br>1,5 semaine             | Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance :<br>$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$ .<br>Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ .<br>Relation $V(aX) = a^2 V(X)$ .<br>Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.<br>Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n/n$ . | Espérance et variance de la loi binomiale.                                                                              |                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                  |

| Chapitres                                                        | Contenus                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Démonstrations                                                                                                                                                                                                     | Algorithmes                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Histoire des maths                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Calcul intégral 1</b><br><br>1,5 semaine                      | Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a;b]$ comme aire sous la courbe représentative de $f$ . Notation $\int_a^b f(x)dx$ .<br>Théorème : si $f$ est une fonction continue positive sur $[a;b]$ , alors la fonction $F_a$ définie sur $[a;b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$ .<br>Sous les mêmes hypothèses, relation $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où $F$ est une primitive quelconque de $f$ . Notation $[F(x)]_a^b$ .   | Pour tout fonction positive croissante $f$ sur $[a;b]$ , la fonction $x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de $f$ .<br>Pour toute primitive $F$ de $f$ , la relation $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Anticipation du calcul intégral chez Archimède, Liu-Hui, Ibn al-Haytham, puis bien plus tard Grégoire de Saint Vincent, Galilée ou Cavalieri.<br>Le calcul différentiel s'est développé de concert avec la physique mathématique au XVIIe (Fermat, Huygens, Pascal, Barrow)                                                                               |
| <b>Fonctions sinus et cosinus</b><br><br>1 semaine               | Dérivées, variations, courbes représentatives, primitives.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Calcul intégral 2</b><br><br>2 semaines                       | Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.<br>Définition par les primitives de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $f$ est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant $a$ et $b$ .<br>Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.<br>Valeur moyenne d'une fonction.<br>Intégration par parties.                                                                                                                                        | Intégration par parties.                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Newton et Leibniz révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait la mise au point de la notion de limite.                                                                                                                                                                   |
| <b>Concentration, loi des grands nombres</b><br><br>1,5 semaines | Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire $X$ d'espérance $\mu$ et de variance $V$ , et quelque soit le réel strictement positif $\delta$ : $P( X - \mu  \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ .<br>Inégalité de concentration. Si $M_n$ est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille $n$ d'une variable aléatoire d'espérance $\mu$ et de variance $V$ , alors pour tout $\delta > 0$ , $P( M_n - \mu  \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$ .<br>Loi des grands nombres. |                                                                                                                                                                                                                    | Calculer la probabilité de $( S_n - pn  > \sqrt{n})$ , où $S_n$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n,p)$ . Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev.<br>Simulation d'une marche aléatoire.<br>Simuler $N$ échantillons de taille $n$ d'une variable aléatoire et étudier cet échantillon. | Inégalité démontrée par Bienaymé (1853) et Tchebychev (1867) en parlant de fréquences d'échantillon plutôt que de variables aléatoires. Ils fournissent aussi une démonstration plus simple pour la loi des grands nombres.<br>Au XIXe la modélisation des erreurs de mesure va devenir centrale pour la statistique (Lagrange, Laplace, Gauss, Legendre) |