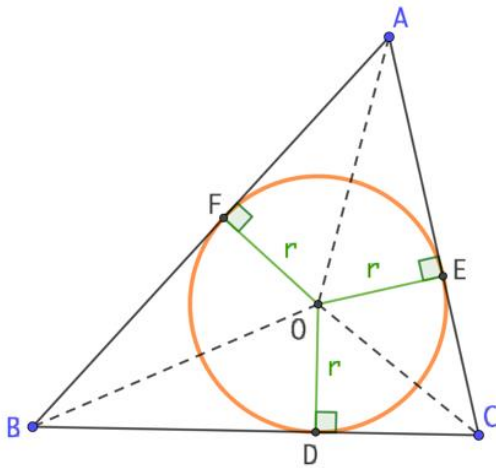
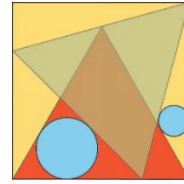


SANGAKUS - Prologue - Groupe A

Les Sangakus sont des problèmes géométriques japonais mettant en jeu des figures esthétiques (cercles, polygones réguliers, ellipses, sphères...) et qui ont été gravés sur des tablettes de bois à partir du XIV^e siècle.



Sur la figure ci-contre, les droites tracées en pointillés sont les axes de symétrie de chaque angle du triangle ABC. Ce sont les bissectrices des angles du triangle et partagent donc chaque angle en deux angles de même mesure.

Propriété : Tout point placé sur la bissectrice d'un angle se trouve à égale distance des deux côtés de l'angle.

Le point O, intersection des trois bissectrices est donc à égale distance des trois côtés du triangle.

Définition : Le cercle de centre O tangent aux trois côtés du triangle est appelé **cercle inscrit** au triangle ABC. Les points D, E et F sont les projetés orthogonaux de O sur les côtés du triangle.

Cas particulier d'un triangle rectangle.

- 1) Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 8$.
- 2) Calculer BC et en déduire le périmètre de ABC. $BC = 10$ $P = 24$
- 3) En vous aidant de cette [vidéo](#), construire les trois bissectrices de ce triangle rectangle qui sont concourantes et tracer le cercle inscrit.

Calculer le rayon r du cercle inscrit en utilisant ce résultat admis : $r = \frac{2 \times \text{aire de } ABC}{\text{périmètre de } ABC} = \frac{2 \times 24}{24} = 2 \text{ cm}$

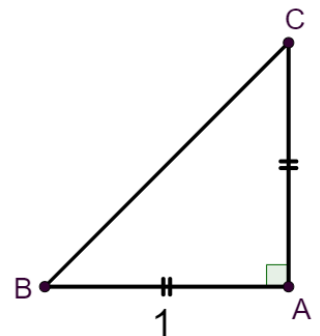
Trigonométrie dans un triangle rectangle isocèle.

- 1) Le triangle rectangle isocèle ci-contre est tel que $AB = AC = 1$.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$? 45°
- 2) Calculer la valeur exacte de BC. $\sqrt{2}$
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos(45^\circ)$; $\sin(45^\circ)$ et de $\tan(45^\circ)$.

$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

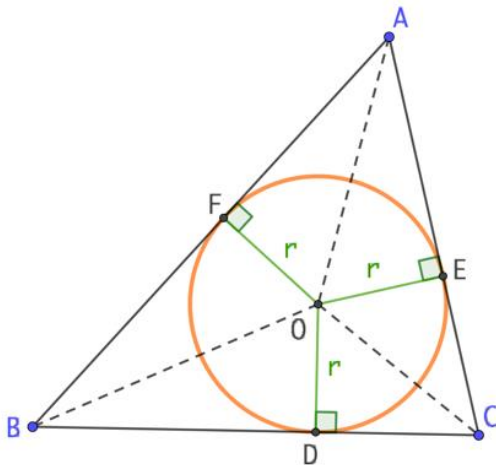
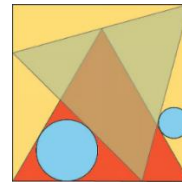
$$\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45^\circ) = 1$$



SANGAKUS - Prologue - Groupe B

Les Sangakus sont des problèmes géométriques japonais mettant en jeu des figures esthétiques (cercles, polygones réguliers, ellipses, sphères...) et qui ont été gravés sur des tablettes de bois à partir du XIVe siècle.



Sur la figure ci-contre, les droites tracées en pointillés sont les axes de symétrie de chaque angle du triangle ABC. Ce sont les bissectrices des angles du triangle et partagent donc chaque angle en deux angles de même mesure.

Propriété : Tout point placé sur la bissectrice d'un angle se trouve à égale distance des deux côtés de l'angle.

Le point O, intersection des trois bissectrices est donc à égale distance des trois côtés du triangle.

Définition : Le cercle de centre O tangent aux trois côtés du triangle est appelé **cercle inscrit** au triangle ABC. Les points D, E et F sont les projetés orthogonaux de O sur les côtés du triangle.

Cas particulier d'un triangle équilatéral de côté 1.

- 1) Tracer un triangle équilatéral.
- 2) En vous aidant de cette [vidéo](#), construire les trois bissectrices de ce triangle équilatéral qui sont concourantes et tracer le cercle inscrit.
- 3) H désigne le projeté orthogonal de A sur (BC). C'est ici le milieu de [BC]. En choisissant $AB = AC = BC = 1$, montrer que la valeur exacte de la hauteur AH est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 4) En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle équilatéral. $\text{Aire} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

- 5) Calculer le rayon r du cercle inscrit en utilisant ce résultat admis : $r = \frac{2 \times \text{aire de } ABC}{\text{périmètre de } ABC} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Trigonométrie dans le triangle rectangle ABH

- 1) Le triangle ABH est rectangle en H. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$? $60^\circ / 30^\circ$
- 2) On rappelle que $AB=1$; $BH = \frac{1}{2}$ et $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$
En déduire les valeurs exactes de $\cos(30^\circ)$; $\sin(30^\circ)$ et de $\tan(30^\circ)$.

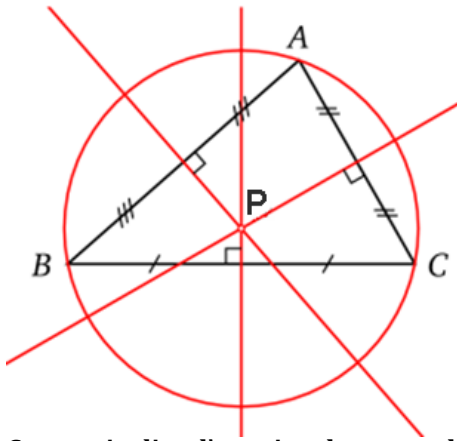
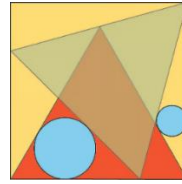
$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(30^\circ) = 0,5$$

$$\text{et de } \tan(30^\circ) = \frac{0,5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

SANGAKUS - Prologue - Groupe C

Les Sangakus sont des problèmes géométriques japonais mettant en jeu des figures esthétiques (cercles, polygones réguliers, ellipses, sphères...) et qui ont été gravés sur des tablettes de bois à partir du XIVe siècle.



Dans le triangle ABC ci-contre le point P se trouve à égale distance des trois sommets du triangle.

Ce point P est obtenu en traçant les trois médiatrices du triangle. Le cercle de centre P qui passe par les trois sommets est appelé **cercle circonscrit** au triangle ABC.

Cas particulier d'un triangle rectangle.

- 1) Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 8$
- 2) Calculer BC. **$BC = 10$**
- 3) Calculer l'aire de ABC. **Aire = 24**
- 4) En vous aidant de cette [vidéo](#), construire les trois médiatrices de ce triangle rectangle qui sont concourantes et tracer son cercle circonscrit. Que remarque-t-on ?
- 5) Calculer le rayon R du cercle circonscrit en utilisant le résultat suivant admis :

$$R = \frac{AB \times AC \times BC}{4 \times \text{aire de ABC}} = \frac{6 \times 8 \times 10}{4 \times 24} = 5$$

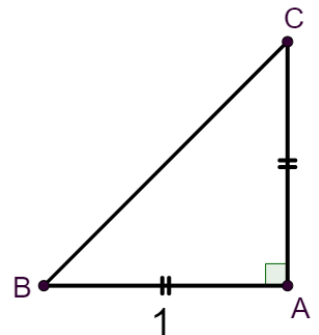
Trigonométrie dans un triangle rectangle isocèle.

- 1) Le triangle rectangle isocèle ci-contre est tel que $AB = AC = 1$.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$? **45°**
- 2) Calculer la valeur exacte de BC. **$\sqrt{2}$**
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos(45^\circ)$; $\sin(45^\circ)$ et de $\tan(45^\circ)$.

$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

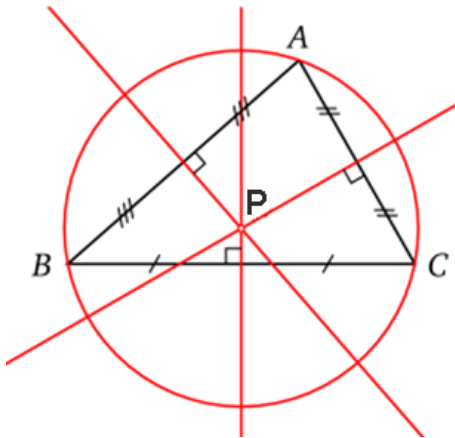
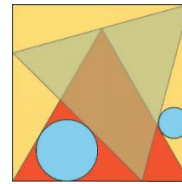
$$\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45^\circ) = 1$$



SANGAKUS - Prologue - Groupe D

Les Sangakus sont des problèmes géométriques japonais mettant en jeu des figures esthétiques (cercles, polygones réguliers, ellipses, sphères...) et qui ont été gravés sur des tablettes de bois à partir du XIVe siècle.



Dans le triangle ABC ci-contre le point P se trouve à égale distance des trois sommets du triangle.

Ce point P est obtenu en traçant les trois médiatrices du triangle. Le cercle de centre P qui passe par les trois sommets est appelé **cercle circonscrit** au triangle ABC.

Cas particulier d'un triangle équilatéral de côté 1

- 1) Tracer un triangle équilatéral ABC.
- 2) En vous aidant de cette [vidéo](#), construire les trois médiatrices de ce triangle équilatéral qui sont concourantes et tracer son cercle circonscrit.
- 3) H désigne le projeté orthogonal de A sur (BC). C'est ici le milieu de [BC]. En choisissant $AB = AC = BC = 1$, montrer que la valeur exacte de la hauteur AH est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 4) En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle équilatéral. $Aire = \frac{\sqrt{3}}{4}$
- 5) Calculer le rayon R du cercle circonscrit en utilisant le résultat suivant admis : $R = \frac{AB \times AC \times BC}{4 \times \text{aire de ABC}}$

$$R = \frac{1 \times 1 \times 1}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Trigonométrie dans le triangle rectangle ABH

- 1) Le triangle ABH est rectangle en H. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$? $60^\circ / 30^\circ$
- 2) On rappelle que $AB = 1$; $BH = \frac{1}{2}$ et $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$
En déduire les valeurs exactes de $\cos(60^\circ)$; $\sin(60^\circ)$ et de $\tan(60^\circ)$.

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et de } \tan(60^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$



SANGAKUS

Regroupement des informations

- Définition du cercle inscrit d'un triangle. Méthode pour le tracer.

Le cercle inscrit à un triangle est le cercle tangent aux trois côtés du triangle.

Le centre de ce cercle est le point d'intersection des bissectrices des angles du triangle.

Méthode de construction : On trace au moins deux bissectrices des angles du triangle. A l'intersection, on place le point O, centre du cercle inscrit. On place O' le projeté orthogonal de O sur un des côtés du triangle.

On trace alors le cercle de centre O et de rayon [OO'].

- Formule pour calculer le rayon r du cercle inscrit d'un triangle quelconque ABC : $\frac{2 \times \text{aire de ABC}}{\text{Périmètre de ABC}}$

- Rayon du cercle inscrit d'un triangle équilatéral de côté 1 : $\text{Rayon} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(♠) Important : le rayon du cercle inscrit d'un triangle équilatéral de côté k est $\frac{k \times \sqrt{3}}{6}$

-
- Définition du cercle circonscrit d'un triangle. Méthode pour le tracer.

Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle qui passe par les 3 sommets du triangle.

Le centre de ce cercle est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle.

Méthode de construction : On trace les médiatrices d'au moins deux côtés du triangle (ex : triangle ABC).

A l'intersection, on place le point O, centre du cercle circonscrit.

On trace alors le cercle de centre O et de rayon [OA].

- Formule pour calculer le rayon R du cercle circonscrit d'un triangle quelconque ABC : $\frac{AB \times AC \times BC}{4 \times \text{Aire de ABC}}$

- Rayon du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral de côté 1 : $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(♣) Important : le rayon du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral de côté k est $\frac{k \times \sqrt{3}}{3}$

- Particularité du cercle circonscrit d'un triangle rectangle : **Le centre du cercle est le milieu de l'hypoténuse.**

- Hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 : $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Diagonale d'un carré de côté 1 : $\sqrt{2}$

- Trigonométrie : compléter avec les valeurs exactes

	30°	45°	60°
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$