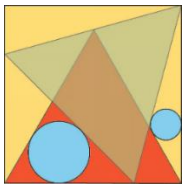
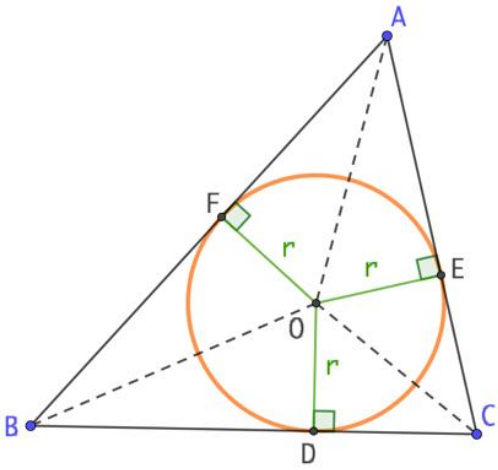
SANGAKUS – Prologue – Groupe A

Les Sangakus sont des problèmes géométriques japonais mettant en jeu des figures esthétiques (cercles, polygones réguliers, ellipses, sphères...) et qui ont été gravés sur des tablettes de bois à partir du XIVe siècle.





Sur la figure ci-contre, les droites tracées en pointillés sont les axes de symétrie de chaque angle du triangle ABC. Ce sont les bissectrices des angles du triangle et partagent donc chaque angle en deux angles de même mesure.

Propriété : Tout point placé sur la bissectrice d'un angle se trouve à égale distance des deux côtés de l'angle.

Le point O, intersection des trois bissectrices est donc à égale distance des trois côtés du triangle.

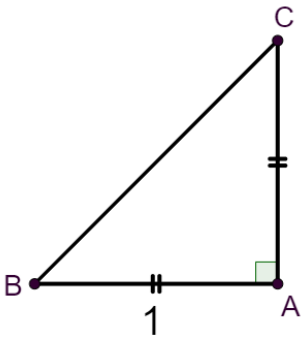
Définition : Le cercle de centre O tangent aux trois côtés du triangle est appelé **cercle inscrit** au triangle ABC. Les points D, E et F sont les projetés orthogonaux de O sur les côtés du triangle.

Cas particulier d'un triangle rectangle.

1) Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$.
2) Calculer BC et en déduire le périmètre de ABC.
3) En vous aidant de cette **vidéo** , construire les trois bissectrices de ce triangle rectangle qui sont concourantes et tracer le cercle inscrit.
4) Calculer le rayon r du cercle inscrit en utilisant ce résultat admis : $r = \dfrac{2 \times aire\ de\ ABC}{périmètre\ de\ ABC}$

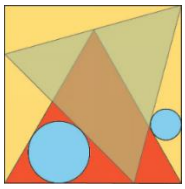
Trigonométrie dans un triangle rectangle isocèle.

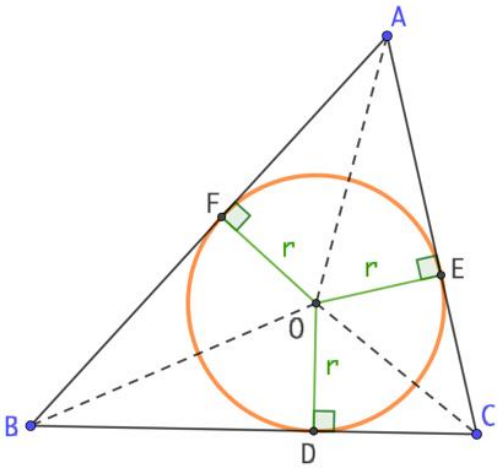
1) Le triangle rectangle isocèle ci-contre est tel que $AB = AC = 1$.
   Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?
2) Calculer la valeur exacte de BC.
3) En déduire les valeurs exactes de $cos(45°)$; $sin(45°)$ et de $tan(45°)$.



SANGAKUS – Prologue – Groupe B

Les Sangakus sont des problèmes géométriques japonais mettant en jeu des figures esthétiques (cercles, polygones réguliers, ellipses, sphères...) et qui ont été gravés sur des tablettes de bois à partir du XIVe siècle.





Sur la figure ci-contre, les droites tracées en pointillés sont les axes de symétrie de chaque angle du triangle ABC. Ce sont les bissectrices des angles du triangle et partagent donc chaque angle en deux angles de même mesure.

Propriété : Tout point placé sur la bissectrice d'un angle se trouve à égale distance des deux côtés de l'angle.

Le point O, intersection des trois bissectrices est donc à égale distance des trois côtés du triangle.

Définition : Le cercle de centre O tangent aux trois côtés du triangle est appelé **cercle inscrit** au triangle ABC. Les points D, E et F sont les projetés orthogonaux de O sur les côtés du triangle.

Cas particulier du triangle équilatéral de côté 1.

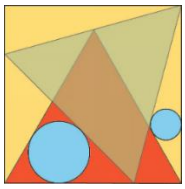
1) Tracer un triangle équilatéral.
2) En vous aidant de cette **vidéo**, construire les trois bissectrices de ce triangle équilatéral qui sont concourantes et tracer le cercle inscrit.
3) H désigne le projeté orthogonal de A sur (BC). C'est ici le milieu de [BC]. En choisissant $AB = AC = BC = 1$, montrer que la valeur exacte de la hauteur AH est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4) En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle équilatéral.
5) Calculer le rayon r du cercle inscrit en utilisant ce résultat admis : $r = \frac{2 \times aire\ de\ ABC}{périmètre\ de\ ABC}$

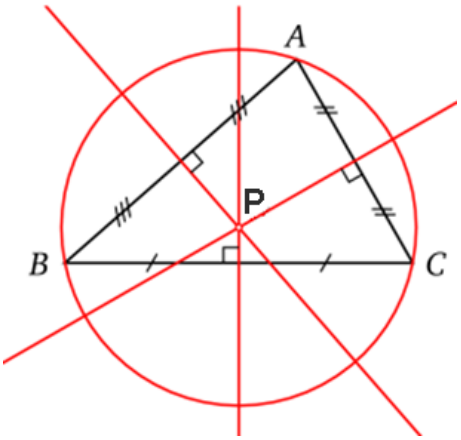
Trigonométrie dans le triangle rectangle ABH

1) Le triangle ABH est rectangle en H. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$?
2) On rappelle que AB=1 ; $BH = \frac{1}{2}$ et $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   En déduire les valeurs exactes de $cos(30°)$; $sin(30°)$ et de $tan(30°)$.

SANGAKUS – Prologue – Groupe C

Les Sangakus sont des problèmes géométriques japonais mettant en jeu des figures esthétiques (cercles, polygones réguliers, ellipses, sphères...) et qui ont été gravés sur des tablettes de bois à partir du XIVe siècle.





Dans le triangle ABC ci-contre le point P se trouve à égale distance des trois sommets du triangle.

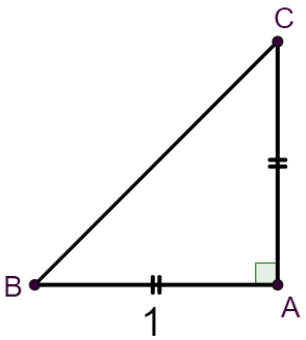
Ce point P est obtenu en traçant les trois médiatrices du triangle. Le cercle de centre P qui passe par les trois sommets est appelé **cercle circonscrit** au triangle ABC.

Cas particulier d'un triangle rectangle.

1) Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 8$
2) Calculer BC.
3) Calculer l'aire de ABC.
4) En vous aidant de cette **vidéo**, construire les trois médiatrices de ce triangle rectangle qui sont concourantes et tracer son cercle circonscrit. Que remarque-t-on ?
5) Calculer le rayon R du cercle circonscrit en utilisant le résultat suivant admis : $R = \frac{AB \times AC \times BC}{4 \times aire\ de\ ABC}$

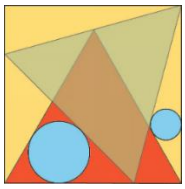
Trigonométrie dans un triangle rectangle isocèle.

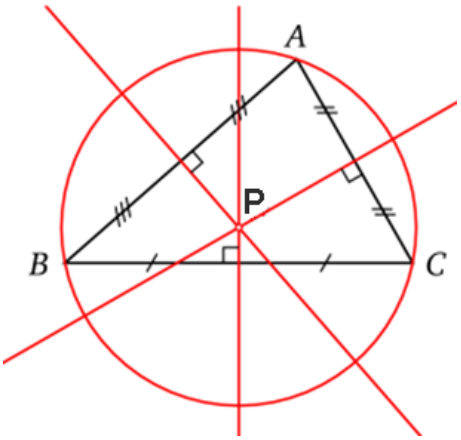
1) Le triangle rectangle isocèle ci-contre est tel que $AB = AC = 1$.
   Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?
2) Calculer la valeur exacte de BC.
3) En déduire les valeurs exactes de $cos(45°)$; $sin(45°)$ et de $tan(45°)$.



SANGAKUS – Prologue – Groupe D

Les Sangakus sont des problèmes géométriques japonais mettant en jeu des figures esthétiques (cercles, polygones réguliers, ellipses, sphères...) et qui ont été gravés sur des tablettes de bois à partir du XIVe siècle.





Dans le triangle ABC ci-contre le point P se trouve à égale distance des trois sommets du triangle.

Ce point P est obtenu en traçant les trois médiatrices du triangle. Le cercle de centre P qui passe par les trois sommets est appelé **cercle circonscrit** au triangle ABC.

Cas particulier du triangle équilatéral de côté 1

1) Tracer un triangle équilatéral ABC.
2) En vous aidant de cette **vidéo**, construire les trois médiatrices de ce triangle équilatéral qui sont concourantes et tracer son cercle circonscrit.
3) H désigne le projeté orthogonal de A sur (BC). C'est ici le milieu de [BC]. En choisissant $AB = AC = BC = 1$, montrer que la valeur exacte de la hauteur AH est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4) En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle équilatéral.
5) Calculer le rayon R du cercle circonscrit en utilisant le résultat suivant admis : $R = \frac{AB \times AC \times BC}{4 \times aire\ de\ ABC}$

Trigonométrie dans le triangle rectangle ABH

1) Le triangle ABH est rectangle en H. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$?
2) On rappelle que $AB = 1$; $BH = \frac{1}{2}$ et $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   En déduire les valeurs exactes de $cos(60°)$; $sin(60°)$ et de $tan(60°)$.

SANGAKUS
Regroupement des informations

Compléter ensemble la synthèse ci-dessous avec ce que chacun d'entre vous a appris dans son groupe.

Ces informations seront librement utilisées pour l'étude de votre SANGAKU.

- Définition du cercle inscrit d'un triangle. Méthode pour le tracer.

  ……

  ……

  ……

- Formule pour calculer le **rayon *r* du cercle inscrit** d'un triangle quelconque :

  ……

- Rayon du cercle inscrit d'un triangle équilatéral de côté 1 : ……

  (♠) Important : le rayon du cercle inscrit d'un triangle équilatéral de côté k est ……

- Définition du cercle circonscrit d'un triangle. Méthode pour le tracer.

  ……

  ……

  ……

- Formule pour calculer **le rayon *R* du cercle circonscrit** d'un triangle quelconque :

  ……

- Rayon du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral de côté 1 : ……

  (♣) Important : le rayon du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral de côté k est ……

- Particularité du cercle circonscrit d'un triangle rectangle : ……

- Hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 : ……

- Diagonale d'un carré de côté 1 : ……

- Trigonométrie : compléter avec les valeurs exactes

	30°	**45°**	**60°**
Cosinus			
Sinus			
Tangente			

SANGAKU N°1

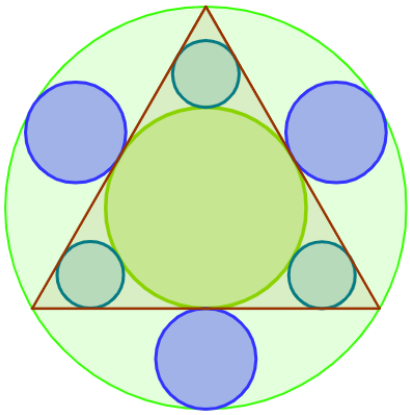
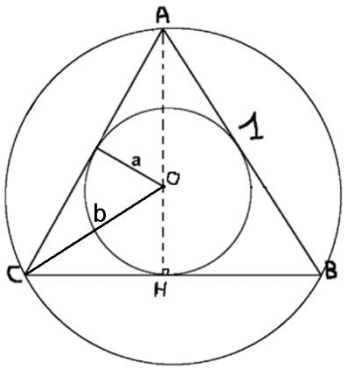


Figure initiale : un triangle équilatéral de côté **1**.

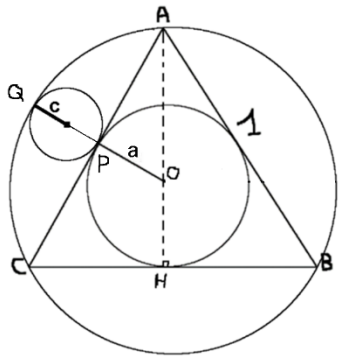
Étape 1 : On retrouve les éléments du prologue mais il est toujours intéressant de refaire les calculs.



1) Calculer AH et l'aire du triangle ABC.

2) Calculer le rayon **a** du cercle inscrit au triangle équilatéral ABC.

3) Calculer le rayon **b** du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC.



Étape 2 :

On note **c** le rayon de chacun des trois cercles placés à l'extérieur du triangle ABC.

1) Redonner les valeurs de OP et de OQ.

2) Sachant que $OQ = OP + PQ$. Calculer **c** en utilisant les valeurs les valeurs de **a** et **b** trouvées à l'étape 1.

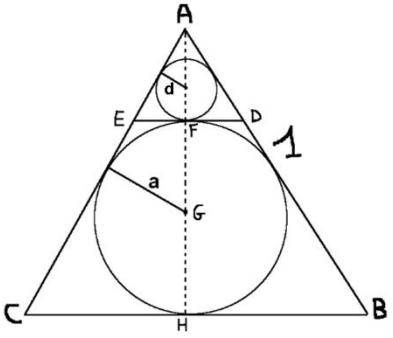
Étape 3 :

1) AH et **a** ont été calculées à l'étape 1. Montrer que $AH = 3 \times \boldsymbol{a}$.

2) Quelle est alors la valeur du rapport $\frac{AF}{AH}$?

3) Que peut-on dire des triangles ADE et ABC ?

4) En déduire la valeur de **d** rayon du petit cercle placé au-dessus du cercle inscrit au triangle ABC.

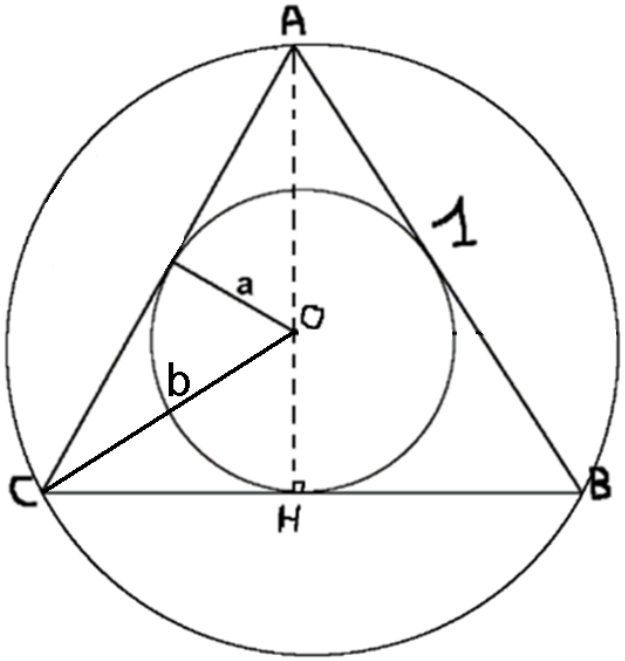


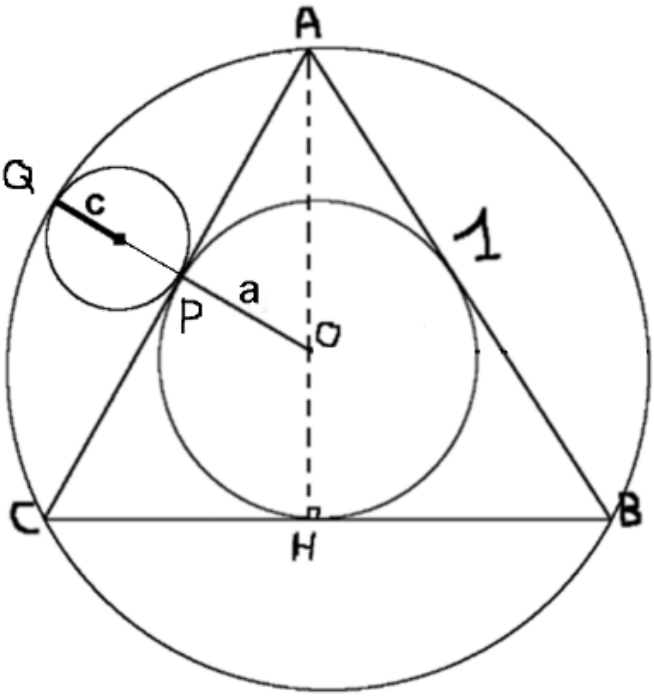
Étape 4 : Synthèse et valeurs approchées pour la construction

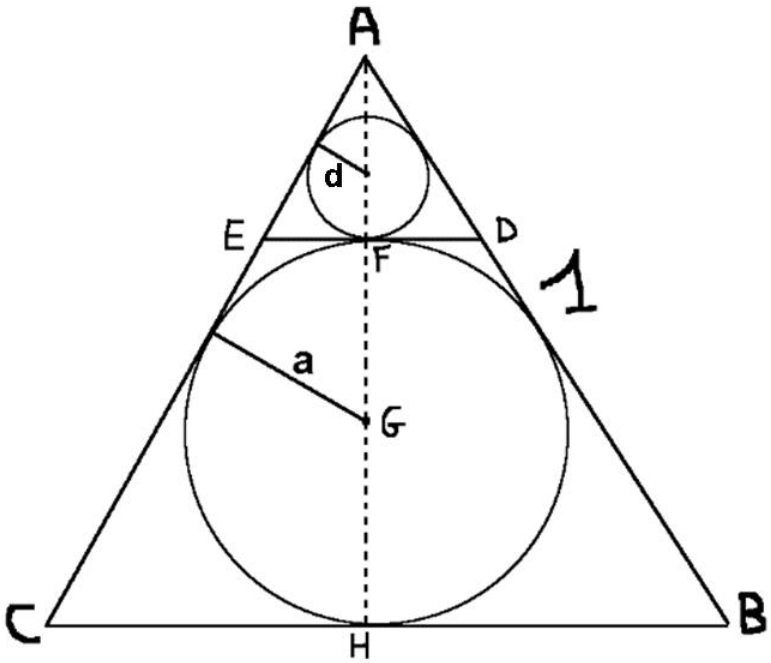
	Triangle équilatéral.	HA	a	b	c	AF	d
Longueur exacte	1						
Longueur (cm) approchée sur la toile	30						

Schémas annexes du SANGAKU n°1

Schémas à découper, à compléter et à coller sur la feuille de présentation de l'œuvre.







SANGAKU N°2

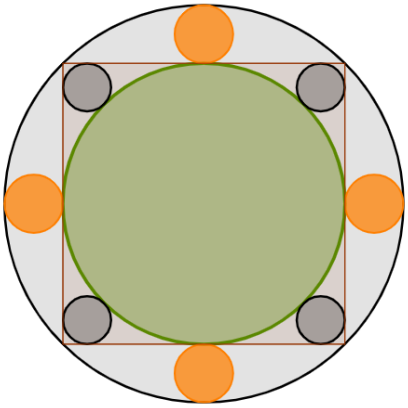
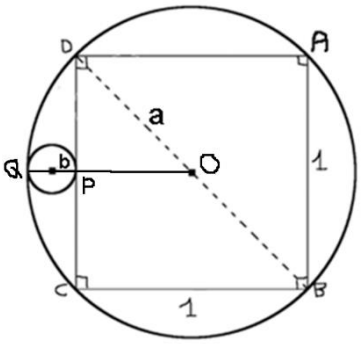


Figure initiale : un carré de côté **1**.

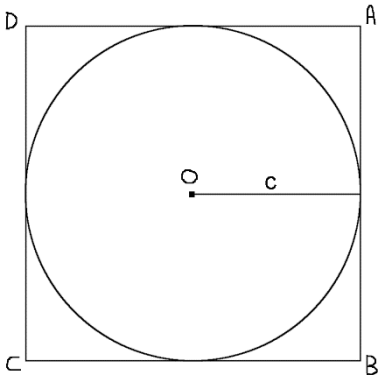
Étape 1 :

1) Calculer le rayon **a** du cercle circonscrit au carré ABCD.

2) Donner les longueurs OP et OQ.
Sachant que $OQ = OP + PQ$ en déduire alors la valeur exacte du rayon **b** du petit cercle placé à gauche de [CD].



Les 3 autres cercles placés à l'extérieur du carré ont évidemment le même rayon.



Étape 2 :
Quel est le rayon **c** du cercle inscrit dans le carré ?

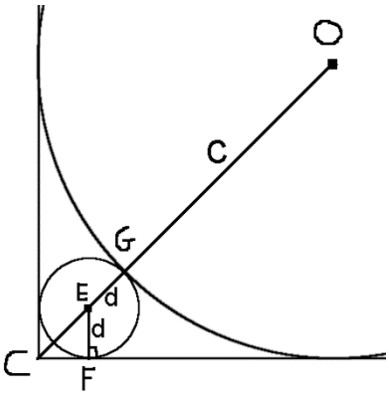
Étape 3 :
On désigne par **d** le rayon du petit cercle de centre E placé dans le coin inférieur gauche du carré.

1) Dans le triangle rectangle isocèle ECF, exprimer CE en fonction de **d**.

2) Sachant que $OC = OG + GE + EC$, donner une expression de OC en fonction de **d**.

3) On sait que $OC = \boldsymbol{a}$ (valeur calculée à l'étape 1). Calculer alors **d.**

Les cercles placés dans les autres coins du carré ont évidemment le même rayon.

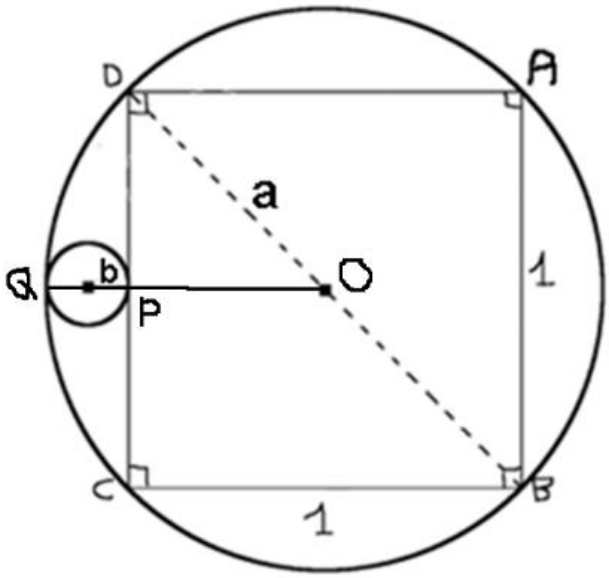


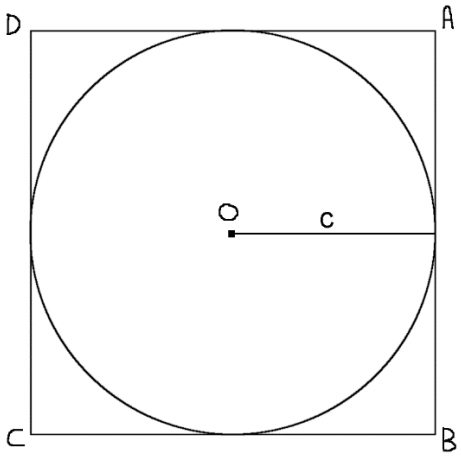
Étape 4 : Synthèse et valeurs approchées pour la construction

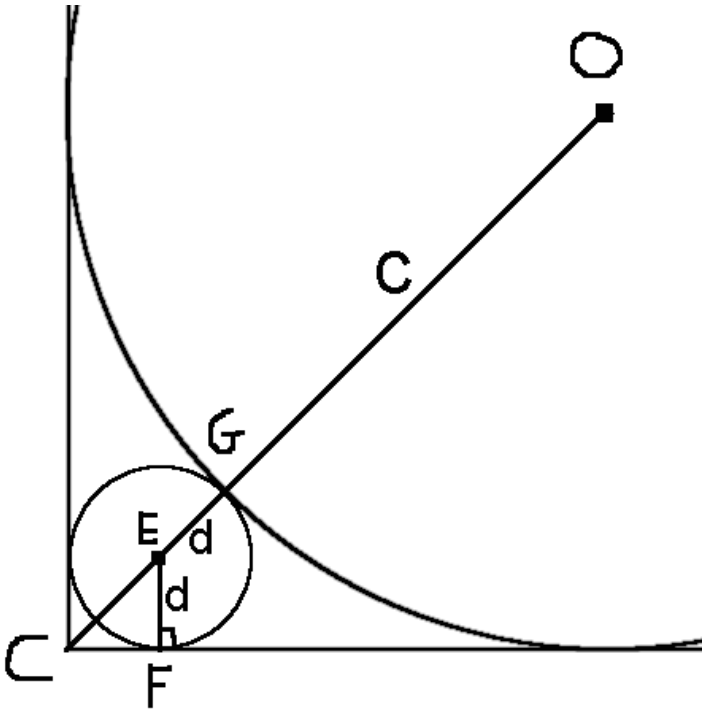
	Carré	a	b	c	d
Longueur exacte	1				
Longueur (cm) approchée sur la toile	26				

Schémas annexes du SANGAKU n°2

Schémas à découper, à compléter et à coller sur la feuille de présentation de l'œuvre.







SANGAKU N°3

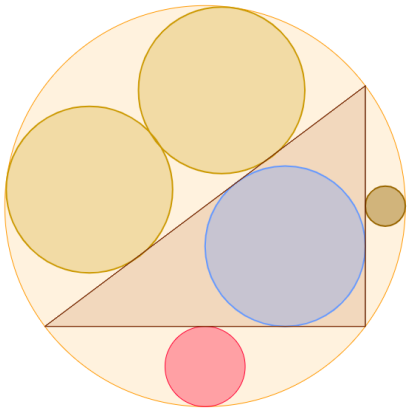
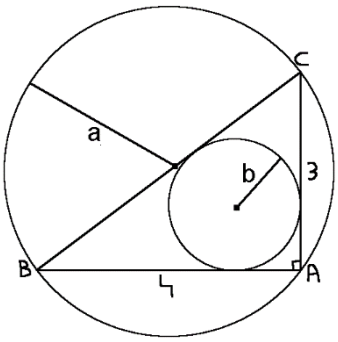
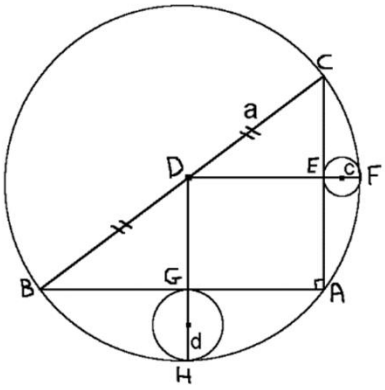


Figure initiale :
un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent **3** et **4**.



Étape 1 :

1) Dans le triangle ABC rectangle en A, calculer BC.
2) Quel est alors le rayon **a** du cercle circonscrit au triangle ABC ?
3) Calculer le rayon **b** du cercle inscrit.



Étape 2 :

1) a) Dans le triangle ABC, calculer DE.

b) Sachant que $DF = \boldsymbol{a}$, en déduire le rayon ***c*** du cercle de diamètre [EF].

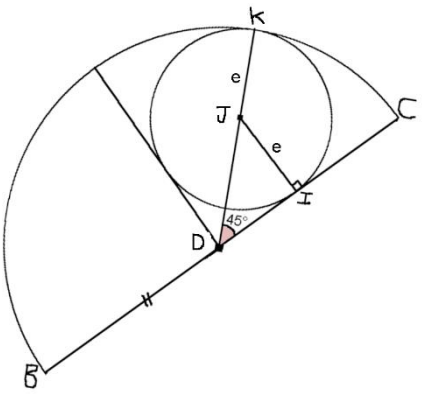
2) a) Dans le triangle ABC, calculer DG.

b) De même, $DH = \boldsymbol{a}$. En déduire le rayon ***d*** du cercle de diamètre [GH].

Étape 3 :

On note **e** le rayon de chacun des deux disques placés au-dessus du côté [BC].

1) Quelle est la nature du triangle DIJ ?
2) Calculer alors DJ en fonction de **e**.
3) Sachant que $DK = DJ + JH = \boldsymbol{a}$, écrire alors une équation d'inconnue **e**.
4) Résoudre cette équation pour ainsi trouver **e**.



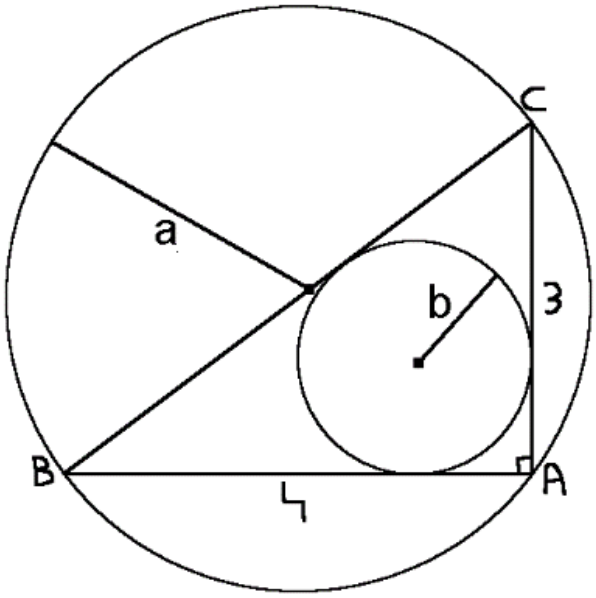
Remarque : le deuxième cercle placé au-dessus de [BD] a le même rayon.

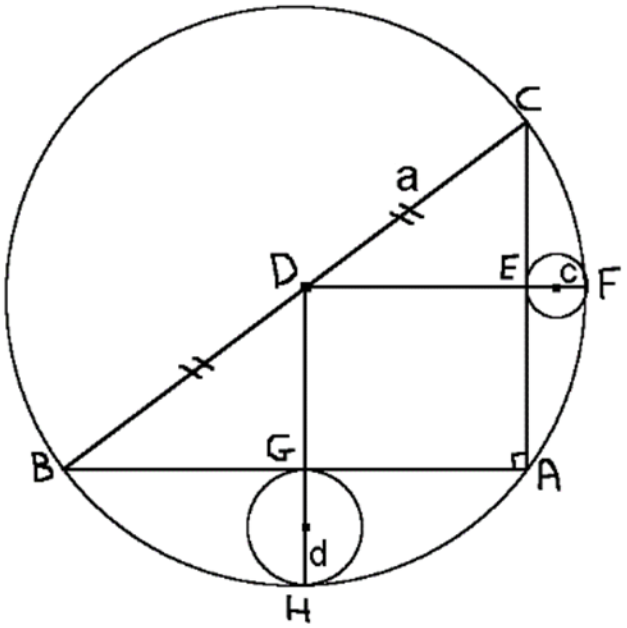
Étape 4 : Synthèse et valeurs approchées pour la construction

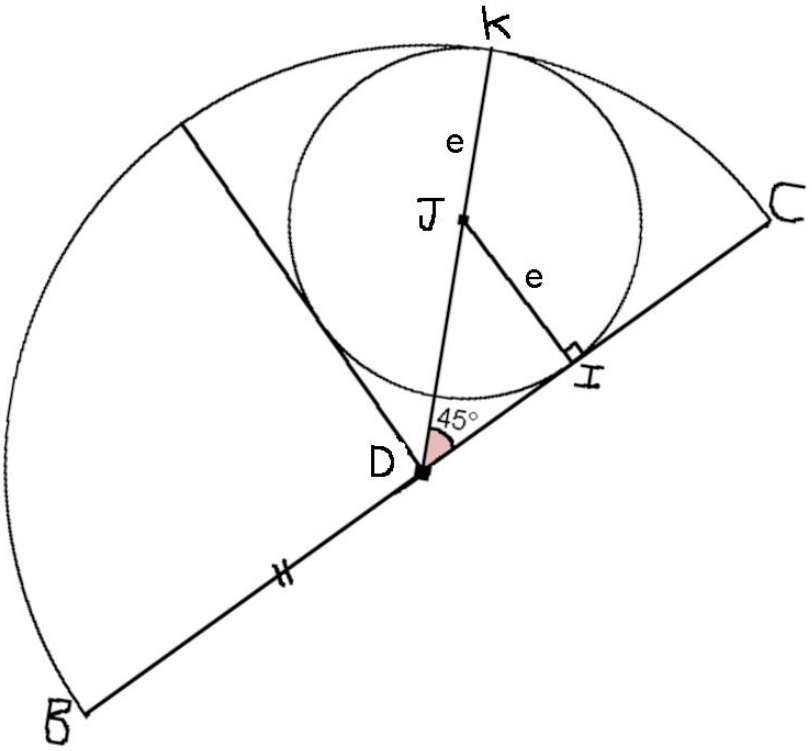
	a	Côté [AB] Triangle	Côté [AC] Triangle	b	c	d	e
Longueur exacte		4	3				
Longueur (cm) approchée sur la toile	19						

Schémas annexes du SANGAKU n°3

Schémas à découper, à compléter et à coller sur la feuille de présentation de l'œuvre.







SANGAKU N°4

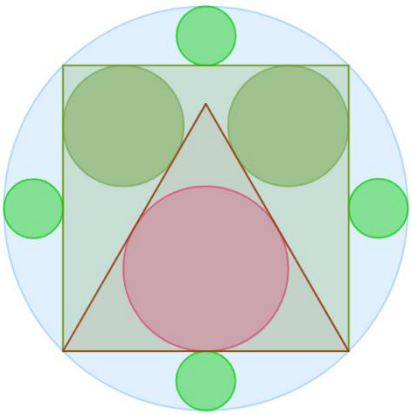
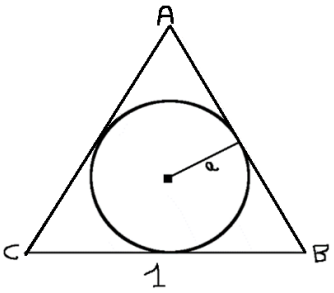
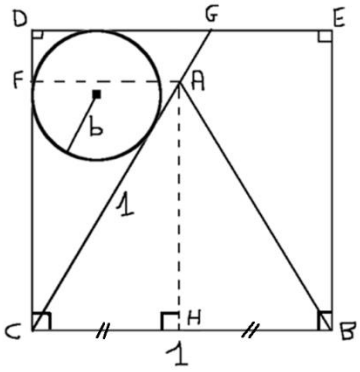


Figure initiale : Un triangle équilatéral de côté **1**.

Étape 1 :
Quel est le rayon **a** du cercle inscrit au triangle équilatéral ABC ?



Étape 2 :



1) Que vaut AH ?

2) Le point G est l'intersection de (AC) avec (DE).
Dans le triangle CDG, on a $CF = AH$ et $(FA)\ //(DG)$. Calculer alors DG.

3) Calculer CG.

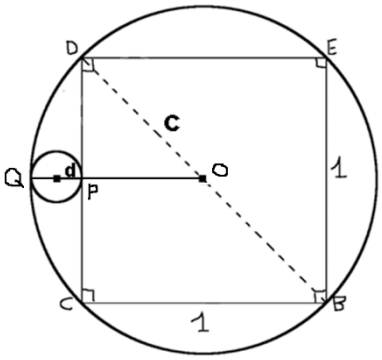
4) Calculer le rayon **b** du cercle inscrit au triangle CDG.

Étape 3 :

1) Calculer le rayon **c** du cercle circonscrit au carré BCDE.

2) Sachant que $OQ = c = OP + PQ$, en déduire la valeur exacte du rayon **d** du petit cercle placé à gauche de [CD].

Les 3 autres cercles placés à l'extérieur du carré ont évidemment le même rayon.

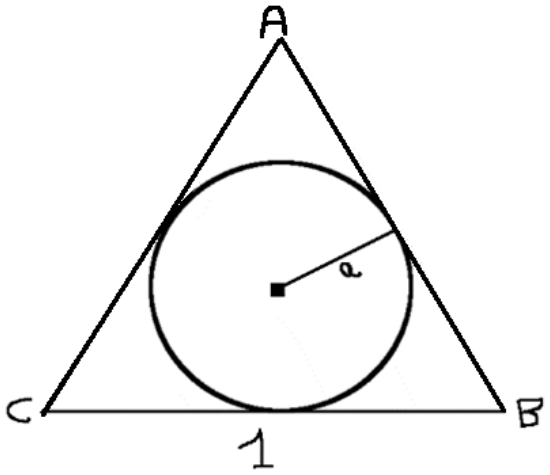


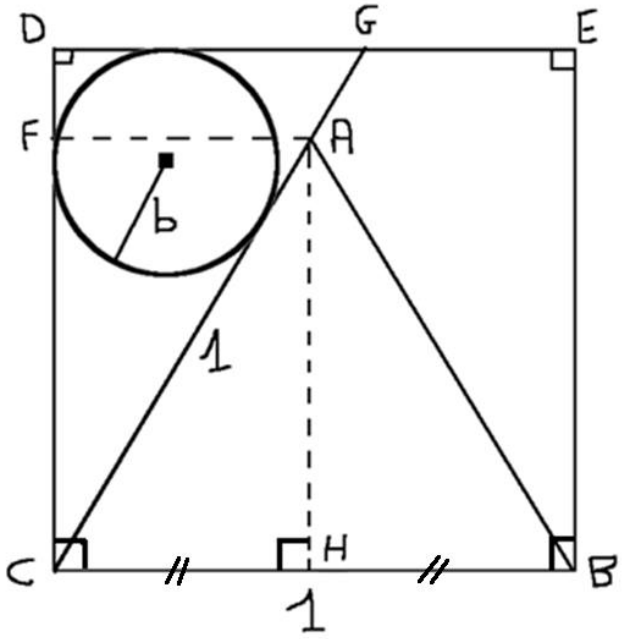
Étape 4 : Synthèse et valeurs approchées pour la construction

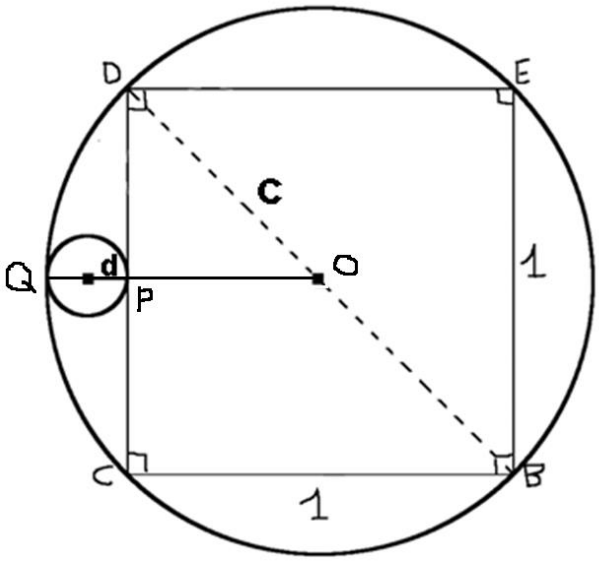
	Triangle équilatéral	a	b	c	d
Longueur exacte	1				
Longueur (cm) approchée sur la toile	26				

Schémas annexes du SANGAKU n°4

Schémas à découper, à compléter et à coller sur la feuille de présentation de l'œuvre.







SANGAKU N°5

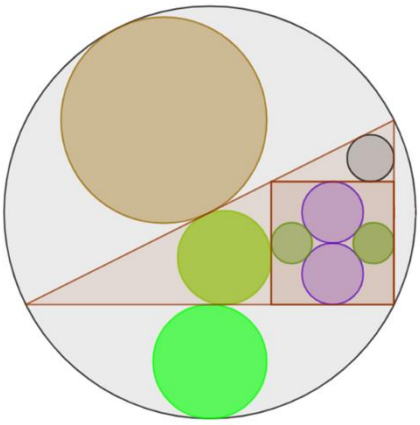


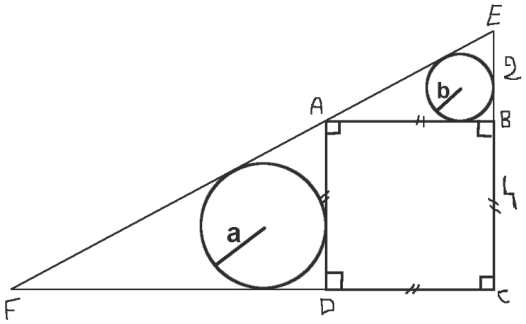
Figure initiale : Un carré de côté **4**.

Remarque : l'étape 3 est indépendante des étapes 1 et 2.

Étape 1 :
Ce carré est inscrit à l'intérieur d'un triangle rectangle comme le montre cette Sangaku et le schéma ci-dessous.

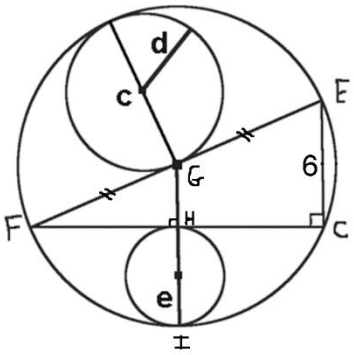
1) Calculer les dimensions du triangle rectangle CEF.

On complétera le schéma annexe.



2) Donner les dimensions du triangle rectangle AFD et calculer alors le rayon **a** du cercle inscrit au triangle AFD.

3) Donner les dimensions du triangle rectangle ABE
et calculer alors le rayon **b** du cercle inscrit au triangle AEB.



Étape 2 :

1) Quel est le rayon **c** du cercle circonscrit au triangle rectangle CEF ?

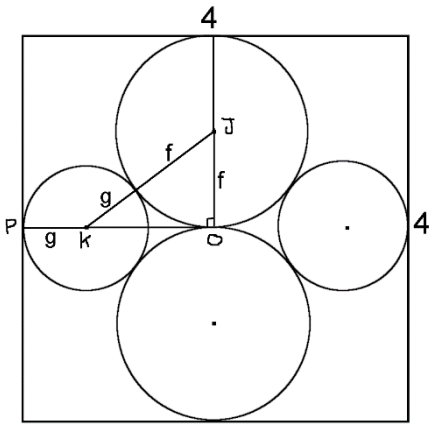
2) En déduire la valeur du rayon **d** du cercle extérieur au segment [EF].

3) Calculer GH. Et en déduire le rayon **e** du cercle placé sous le segment [CD] sachant que $GI = c$

Étape 3 :

1) Quel est le rayon **f** des deux disques positionnés l'un sur l'autre dans le carré ?

2) On note **g** le rayon des deux autres petits disques placés à gauche et à droite de l'empilement des deux premiers.
   a) Exprimer KJ en fonction de **g**.
   b) Sachant que $OP = 2$ exprimer OK en fonction de **g**.
   c) Dans le triangle rectangle OJK écrire l'égalité de Pythagore pour ainsi obtenir une équation d'inconnue **g**.
   d) Résoudre cette équation pour trouver **g**.

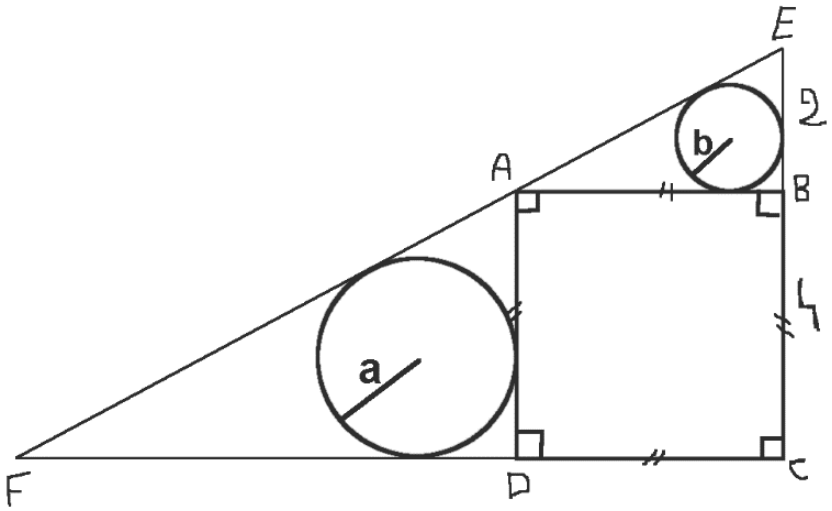


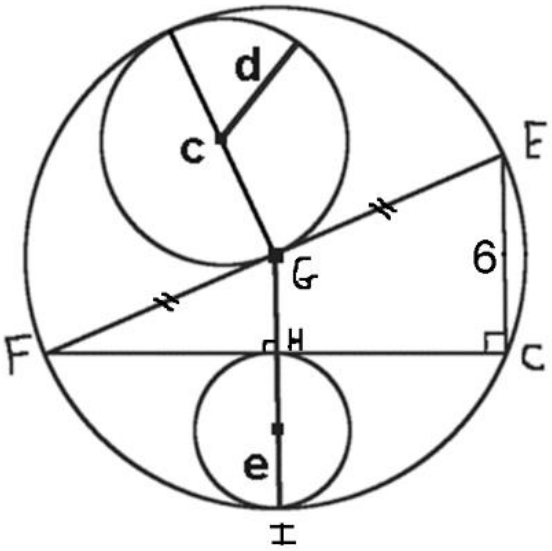
Étape 4 : Synthèse et valeurs approchées pour la construction

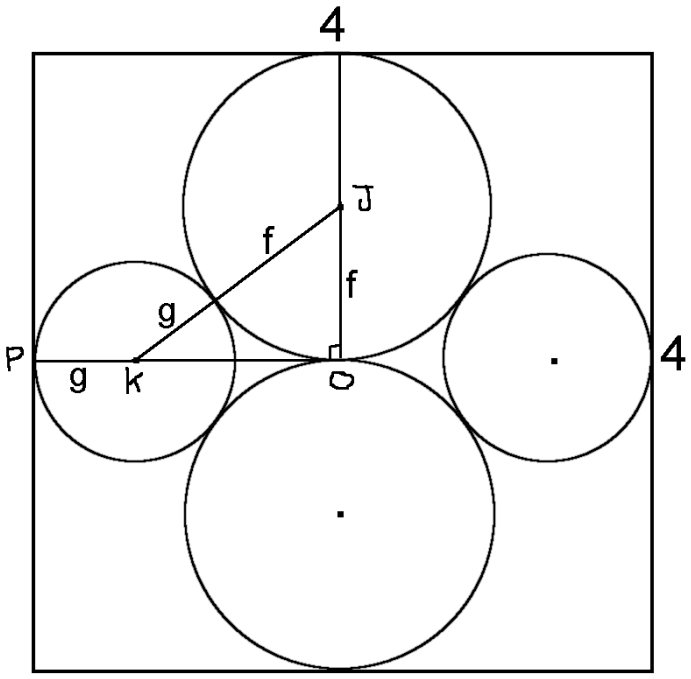
	Carré	FD	a	b	c	d	e	f	g
Longueur exacte	4								
Longueur (cm) approchée sur la toile	11,2								

Schémas annexes du SANGAKU n°5

Schémas à découper, à compléter et à coller sur la feuille de présentation de l'œuvre.







SANGAKU N°6

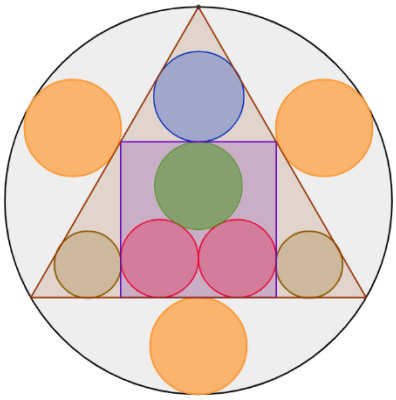
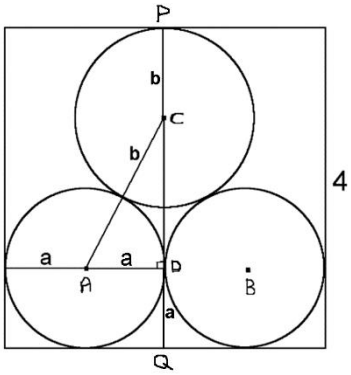


Figure initiale : un carré de côté **4**.

Étape 1 :

1) Quel est le rayon **a** des deux cercles identiques de centres A et B placés dans le carré de côté 4 ?



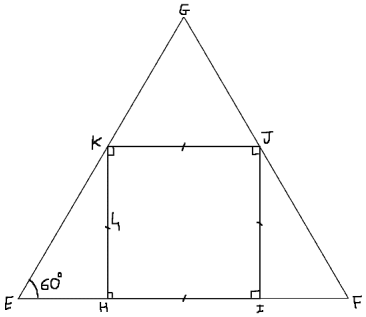
2) On note **b** le rayon du cercle placé au-dessus des deux précédents cercles.

a) Exprimer AC en fonction de **b**.

b) Sachant que $PC + CD + DQ = 4$, exprimer CD en fonction de **b**.

c) Ecrire l'égalité de Pythagore dans le triangle rectangle ACD pour ainsi obtenir une équation d'inconnue **b**.

d) Résoudre cette équation pour ainsi trouver la valeur de **b**.



Étape 2 :

L'objectif est de calculer la longueur commune des trois côtés du triangle équilatéral.

1) Dans le triangle EHK, donner la valeur exacte de EH.
On utilisera la valeur exacte de $tan(60°)$.
Remarque : $IF = EH$

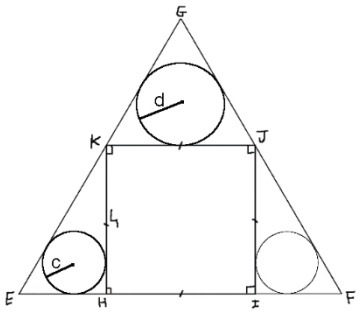
2) Sachant que $EF = EH + HI + IF$, calculer alors EF.

Étape 3 :

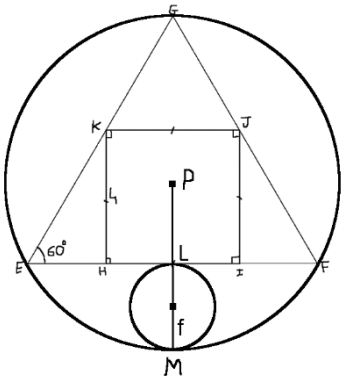
1) a) Dans le triangle rectangle EHK, calculer EK. On utilisera la valeur exacte de $sin(60°)$.

b) Calculer le rayon **c** du cercle inscrit dans le ce triangle EHK.
Remarque : le cercle inscrit dans le triangle IJF a le même rayon.

2) Calculer le rayon **d** du cercle inscrit dans le triangle équilatéral GJK. (♠)



Étape 4 :



1) Calculer le rayon **e** = PM du cercle de centre P circonscrit au triangle équilatéral EFG (♣)

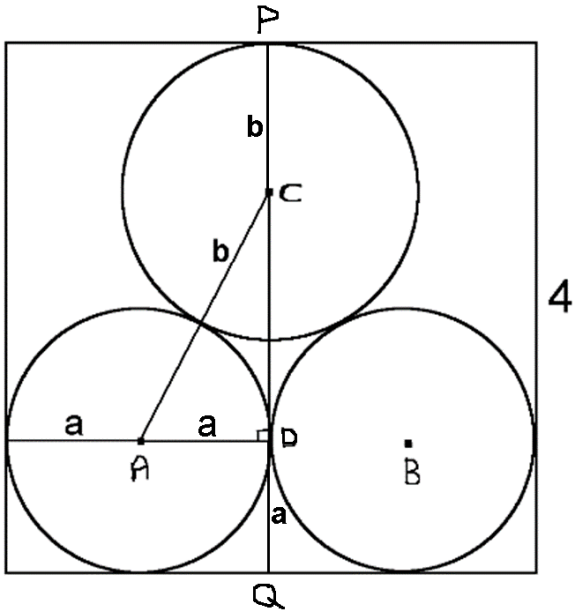
2) [PL] est un rayon du cercle inscrit au triangle EFG (ce cercle inscrit n'est pas tracé sur le schéma). D'après un résultat du prologue $PM = 2 \times PL$.
Calculer alors le rayon **f** du cercle situé au-dessous du côté [EF] du triangle équilatéral.

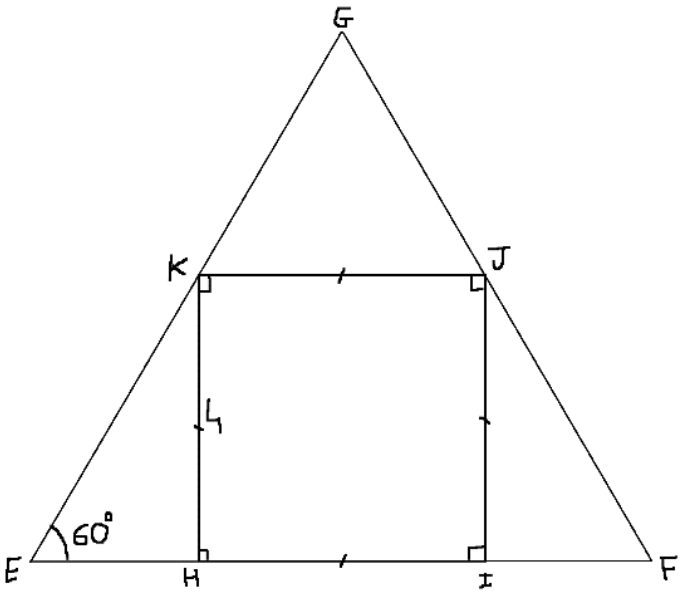
Étape 5 : Synthèse et valeurs approchées pour la construction

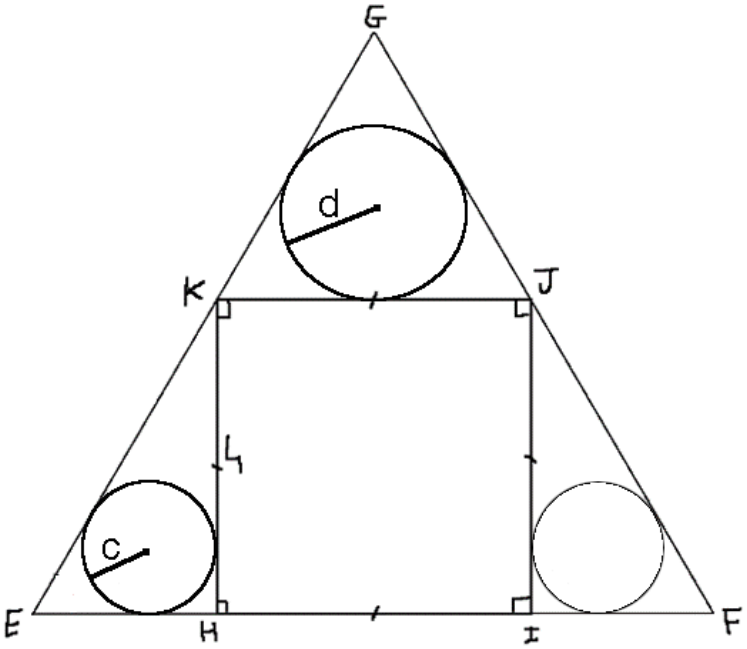
	Carré	a	b	EH	EF	c	d	e	f
Longueur exacte	4								
Longueur (cm) approchée sur la toile	15								

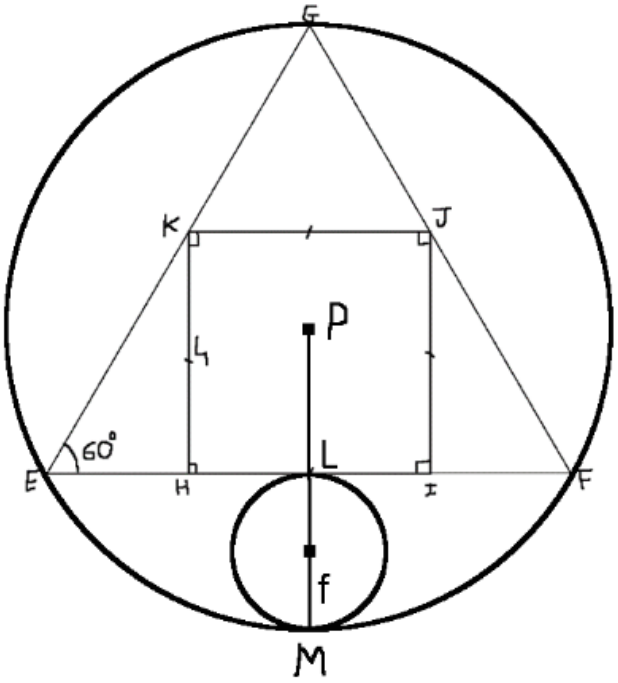
Schémas annexes du SANGAKU n°6

Schémas à découper, à compléter et à coller sur la feuille de présentation de l'œuvre.









SANGAKU N°7

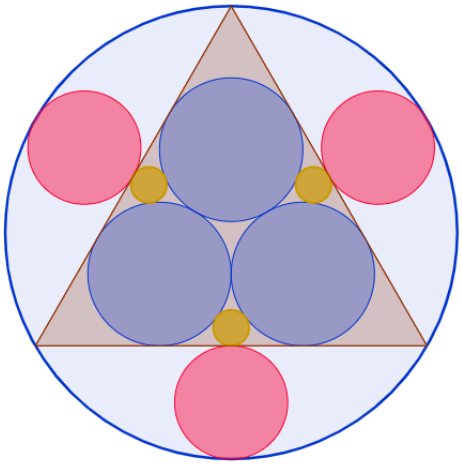
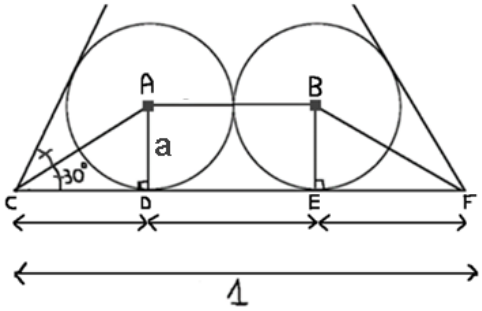


Figure initiale : un triangle équilatéral de côté **1**.

Étape 1 :
On souhaite construire les trois cercles identiques à l'intérieur du triangle, tangents entre eux et aux côtés du triangle.
On désigne par ***a*** le rayon de chacun de ces trois cercles.

On complétera le schéma annexe au fur et à mesure.

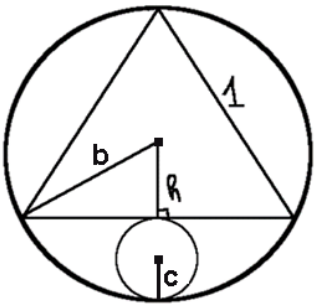


a) Dans le triangle rectangle ACD, exprimer CD en fonction de ***a***.
Aide : utiliser la valeur exacte de tan(30°).

b) Exprimer DE et EF en fonction de ***a***.

c) Sachant que $CF = 1$, écrire alors une équation d'inconnue ***a*** et la résoudre.

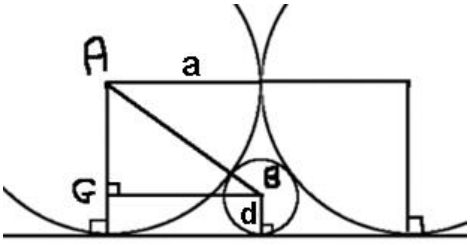
d) Donner alors la valeur exacte de CD. Cette longueur sera utile pour la construction.



Étape 2 :
Quel est le rayon ***b*** du cercle circonscrit au triangle équilatéral ?

Étape 3 ;
a) Calculer la distance ***h*** du centre du cercle circonscrit au triangle à chaque côté du triangle.
b) En déduire le rayon ***c*** de chacun des trois cercles placés à l'extérieur du triangle équilatéral

Étape 4 :
a) Exprimer AB et AG en fonction de ***d*** et de ***a***.



b) On a bien sûr $BG = a$. Ecrire l'égalité de Pythagore dans le triangle rectangle ABG pour obtenir une équation d'inconnue ***d***.
On ne cherchera pas à remplacer ***a*** par sa valeur pour ne pas compliquer les développements.

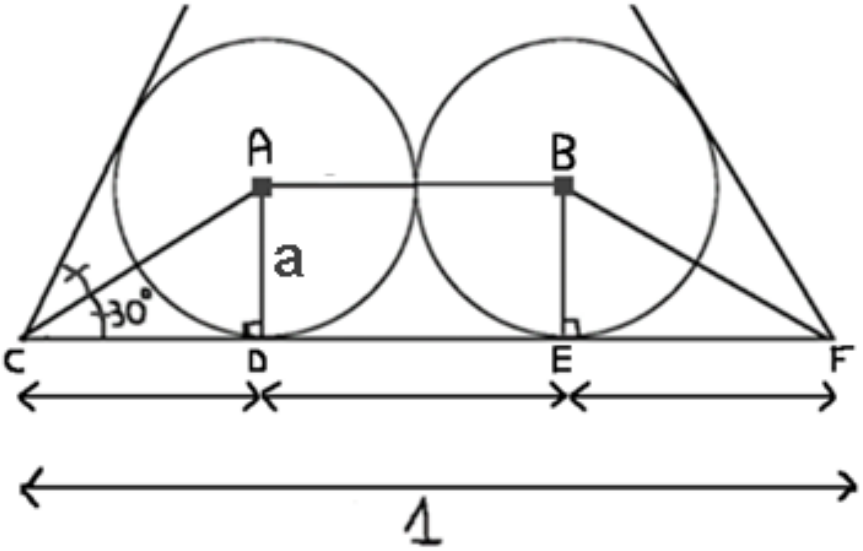
c) Montrer alors que $\boldsymbol{d = \frac{a}{4}}$ et en déduire la valeur de ***d***.

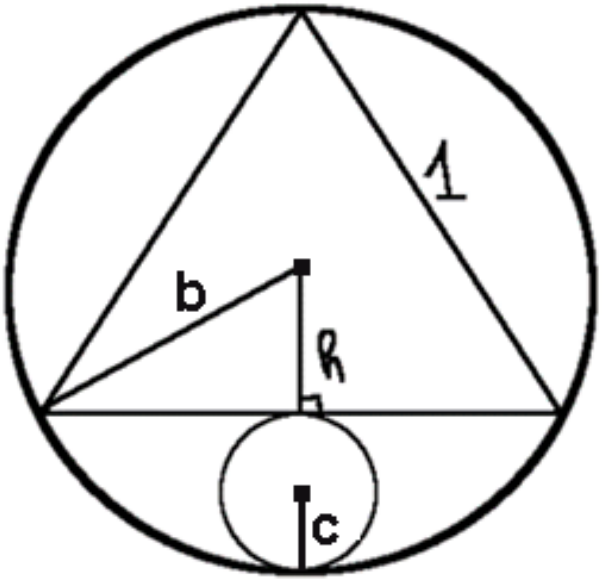
Étape 5 : Synthèse et valeurs approchées pour la construction

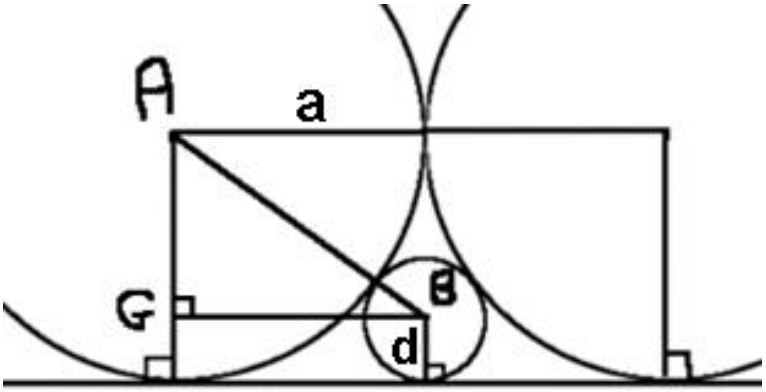
	Triangle équilatéral	CD	a	b	c	d
Longueur exacte	1					
Longueur (cm) approchée sur la toile	33					

Schémas annexes du SANGAKU n°7

Schémas à découper, à compléter et à coller sur la feuille de présentation de l'œuvre.







SANGAKU N°8

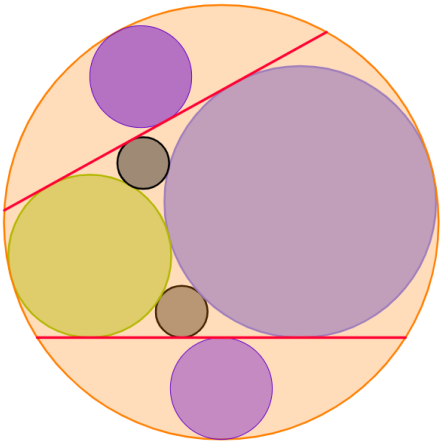


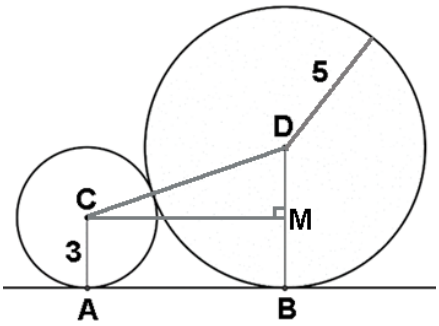
Figure initiale : une droite horizontale et un cercle de rayon **3** tangent à la droite.

Étape 1 :
On souhaite tracer un cercle de centre D de rayon **5**, tangent au cercle initial de centre C et de rayon **3** et tangent à la droite horizontale

Pour placer précisément le point D, il est nécessaire de calculer la distance AB sur le schéma ci-dessous.

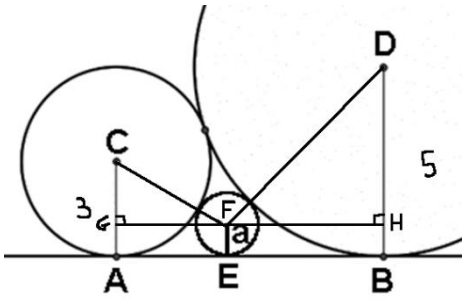
a) Donner sur le schéma annexe les longueurs CD et DM.

b) Montrer que $CM = \sqrt{60}$.



Remarque : $AB = CM$

Étape 2 :
Entre les deux cercles et la droite, il y a de la place pour rajouter un troisième cercle tangent aux deux précédents et à la droite. Nous allons calculer son rayon $\boldsymbol{a}$.



La figure annexe est à compléter au fur et à mesure.

a) Exprimer CF et CG en fonction de $\boldsymbol{a}$.

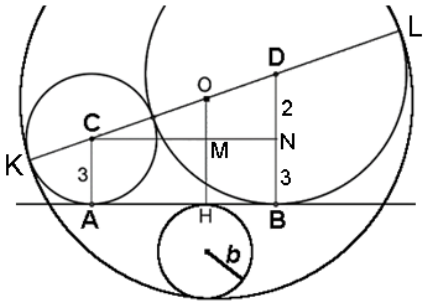
b) Dans le triangle rectangle CFG, montrer alors que $GF = \sqrt{12\boldsymbol{a}} = \sqrt{12} \times \sqrt{\boldsymbol{a}}$

c) Exprimer DF et DH en fonction de $\boldsymbol{a}$.

d) Dans le triangle rectangle DFH, montrer alors que $FH = \sqrt{20\boldsymbol{a}} = \sqrt{20} \times \sqrt{\boldsymbol{a}}$

e) Sachant que $GF + FH = GH = \sqrt{60}$, en déduire la valeur de $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ et ensuite celle de $\boldsymbol{a}$.

f) Pour placer le point F sur la construction, vous aurez besoin d'utiliser la longueur $AE = GF = \sqrt{12\boldsymbol{a}}$. Calculer AE.



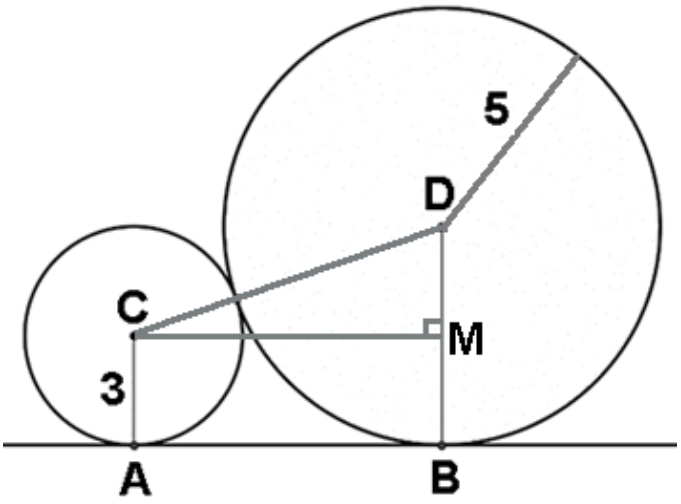
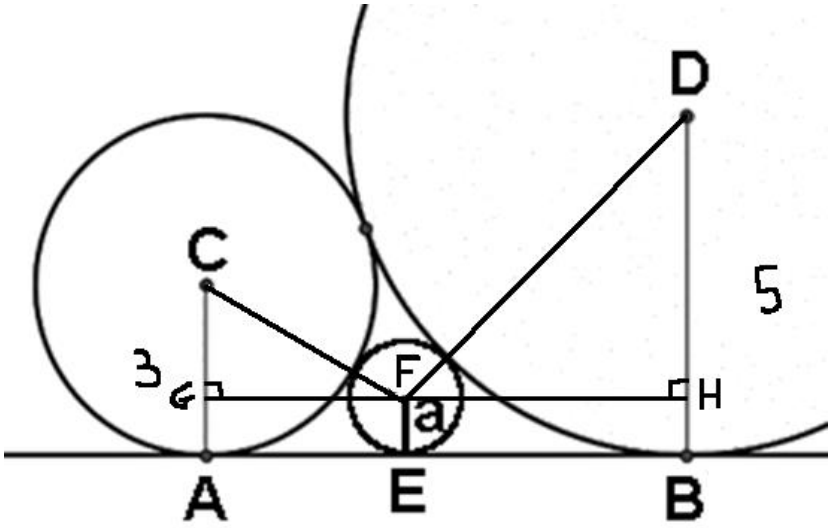
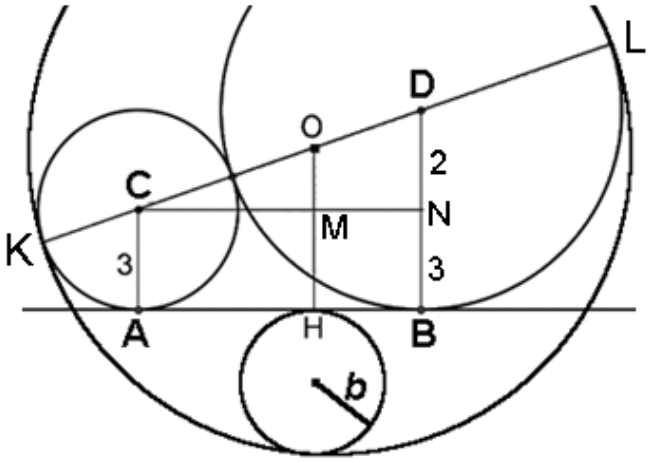
Étape 3 :
Quel est diamètre KL du cercle extérieur qui contient les 6 autres cercles ? Quel est alors son rayon OK ?

Étape 4 :
a) Compléter le schéma annexe en précisant les longueurs CO et OD.
b) Calculer alors OM et en déduire OH.

b) En déduire le rayon $\boldsymbol{b}$ du cercle placé sous la droite horizontale.

Étape 5 : Synthèse et valeurs approchées pour la construction

	1er cercle	CM	2ème cercle	AE	a	CO	OK	b
Longueur exacte	3		5				8	
Longueur (cm) approchée sur la toile							18,00	

Schémas annexes du SANGAKU n°8

Schémas à découper, à compléter et à coller sur la feuille de présentation de l'œuvre.