



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Olympiades académiques de mathématiques 2026 *Académie de Rennes*

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La seconde partie est constituée des exercices académiques et résolue en équipes de 2, 3 ou 4 candidats : **une seule copie par équipe**, portant les noms de tous les membres de l'équipe, est remise à la fin de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives prises. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde Partie

Exercices académiques

Épreuve par équipes de 2, 3 ou 4 candidats

La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les équipes de candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de Mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres équipes de candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

L'énoncé académique comporte 8 pages.

Exercice 1 (pour tous les candidats) : LA FOIRE AUX PROBABILITÉS

Léonie se rend à la foire aux probabilités munie de feuilles, de crayons, d'un compas et de sa calculatrice. Elle joue à différents jeux de lancers sur plateaux. Lors de tous ses lancers, Léonie parvient toujours à atteindre le plateau (sans forcément gagner le jeu). Dans tout cet exercice, on considèrera que la probabilité d'atteindre une région du plateau est proportionnelle à son aire.

Les quatre jeux auxquels Léonie participe sont indépendants.

Pour les jeux 1 et 2, Léonie lance un palet, assimilé à un cylindre, sur un plateau. On appellera *centre du palet* le centre du disque de base.

Lors de tous les lancers pour les jeux 1 et 2, le centre du palet de Léonie atteint le plateau.

Jeu n°1 : JEU DU FRANC PALET

Le plateau de ce jeu est un carré ABCD de 8 dm côté. Le joueur gagne si son palet est entièrement sur le plateau sans dépasser du bord.

1. Dans cette question, le palet de Léonie a un disque de base de rayon 1 dm.
 - a. Sur l'**annexe 1**, hachurer la zone où doit tomber le centre du palet pour que Léonie gagne.
 - b. Montrer que la probabilité que Léonie gagne est égale à 0,5625.
2. Léonie aimerait savoir comment cette probabilité varie en fonction du rayon r du palet, pour $0 < r < 4$.
 - a. On note $p(r)$ la probabilité que Léonie gagne en fonction de r .
Montrer que $p(r) = \frac{(4-r)^2}{16}$.
 - b. Montrer que si $r < 0,1$ alors $p(r) > 0,95$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Jeu n°2 : JEU DU TOUCHE CIBLE

Pour ce jeu, le palet de Léonie a un disque de base de rayon 3 dm. Le plateau de ce jeu est un rectangle EFGH de longueur 15 dm et de largeur 12 dm. Une cible est coloriée sur ce plateau. Le joueur gagne si son palet touche la cible et si le centre de son palet est sur le plateau.

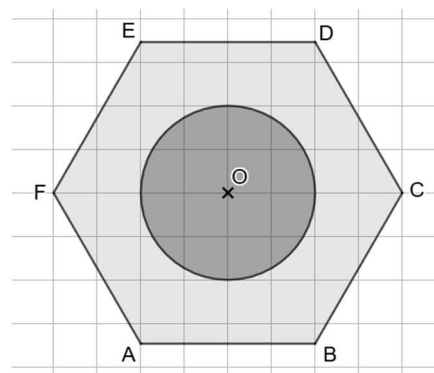
1. Sur un premier plateau, la cible est un disque de rayon 3 dm. Le centre O de la cible est à 7 dm du petit côté [EH] et à 6 dm du grand côté [EF]. Un schéma de ce plateau et de sa cible est donné en annexe 2.
 - a. Sur l'**annexe 2**, hachurer la zone où doit arriver le centre du palet pour gagner à ce jeu.
 - b. Montrer que la probabilité que Léonie gagne à ce jeu est égale à $\frac{\pi}{5}$.
2. Sur un deuxième plateau de mêmes dimensions, la cible est un disque de rayon 3 dm. Cette fois, le centre O de la cible est situé à 6 dm du petit côté [EH] et à 3 dm du grand côté [EF]. Un schéma de ce plateau et de sa cible est donné en annexe 3.
 - a. Sur l'**annexe 3**, hachurer la zone où doit arriver le centre du palet pour gagner à ce jeu avec cette deuxième cible.
 - b. Calculer la probabilité que Léonie gagne à ce jeu.
Toute trace de recherche, même infructueuse, sera valorisée.

Pour les jeux n°3 et 4, on lance des fléchettes sur un plateau. Pour ces deux jeux, on assimilera chaque fléchette à un point.

Jeu n°3 : JEU DE FLÉCHETTES HEXAGONAL

Dans le troisième jeu, le plateau est un hexagone régulier ABCDEF de centre O et de côté 4 dm. Une cible a été coloriée sur ce plateau hexagonal, c'est un disque de rayon 2 dm et centre O.

Les joueurs ont trois lancers à effectuer. Un lancer est réussi lorsque la fléchette atteint la cible. Le jeu est gagné lorsqu'au moins deux lancers sont réussis. On considère que les trois lancers sont indépendants entre eux.



1. On rappelle qu'un hexagone régulier est constitué de 6 triangles équilatéraux.
 - a. Montrer que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 4 mesure $2\sqrt{3}$.
 - b. En déduire l'aire de l'hexagone ABCDEF.
2. Lors de tous les lancers, les fléchettes de Léonie atteignent le plateau.
 - a. Montrer que la probabilité que Léonie réussisse un lancer est égale à $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.
 - b. Calculer la probabilité que Léonie réussisse trois lancers.
 - c. Calculer la probabilité que Léonie gagne à ce jeu. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Jeu n°4 : JEU DE FLÉCHETTES MYSTÈRE

Le quatrième jeu est également un jeu qui consiste à lancer des fléchettes sur un plateau muni d'une cible. Lors de tous les lancers, les fléchettes de Léonie atteignent le plateau.

Le programme ci-dessous permet d'estimer la probabilité que Léonie gagne à ce jeu.

```

from math import*
from random import*
def p(n):
    s=0
    for i in range(n):
        x=uniform(-5,5)
        y=uniform(-5,5)
        if sqrt(x*x+y*y)<1:
            s=s+1
    return (s/n)

```

En langage Python, l'exécution de **uniform(a, b)** renvoie un nombre réel aléatoire compris entre **a** et **b** et l'exécution de **sqrt(a)** renvoie la racine carrée du nombre réel **a**.

1. Tracer un croquis du plateau et de la cible de ce jeu sur l'**annexe 4**.
2. Calculer la probabilité que Léonie gagne à ce jeu.
3. Taper et exécuter le script ci-dessus sur la calculatrice. Dans la console, taper la commande **p(10000)**. Faire plusieurs simulations et noter les valeurs obtenues. Les interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques de la voie générale) : UN CHOIX NATUREL

Définitions et exemple

On suppose qu'il existe sur l'ensemble des entiers naturels un procédé de calcul qui, à tout entier naturel a , associe l'unique entier naturel noté $f(a)$ ayant les propriétés suivantes :

- $f(2) = 0$; $f(3) > 0$ et $f(9999) = 3333$.
- Pour tous les entiers naturels a et b ,
$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
ou
$$f(a + b) = f(a) + f(b) + 1.$$

Par exemple déterminons $f(0)$: on peut écrire que $f(0) = f(0 + 0) = \begin{cases} f(0) + f(0) \\ \text{ou} \\ f(0) + f(0) + 1. \end{cases}$

Si on choisit $f(0) = f(0) + f(0)$, on a $f(0) = 0$.

Sinon, si on choisit $f(0) = f(0) + f(0) + 1$, on a : $f(0) = 2f(0) + 1$ donc $f(0) = -1$.

Or $f(0)$ est un entier naturel. On exclut donc cette possibilité.

On en déduit finalement que $f(0) = 0$.

Partie 1 : PREMIERS RÉSULTATS

1. En utilisant $f(2) = 0$ et $2 = 1 + 1$, justifier que $f(1) = 0$.
2. Montrer que $f(3) = 1$.
3. En utilisant $4 = 2 + 2$ et $4 = 3 + 1$, déterminer la seule valeur possible pour $f(4)$.
4. Déterminer $f(6)$.
5. En écrivant $5 = 4 + 1 = 3 + 2$, montrer que l'on ne peut pas trouver ainsi la valeur de $f(5)$.

Partie 2 : ALLONS PLUS LOIN

1. Justifier que pour tout naturel a , $f(3a) = 3f(a) + C$ où C est égal à 0, 1 ou 2.
2. En utilisant $f(9999)$ justifier que $f(3333) = 1111$.

Propriété : On admet pour la suite que pour tous naturels a et n on a :
 $f(na) = nf(a) + C$ où C est un entier tel que $0 \leq C \leq n - 1$.

3. On cherche à déterminer $f(5)$.
 - a. À partir de $f(3333)$, justifier que $f(101) = 33$.
 - b. En déduire les deux valeurs possibles de $f(100)$.
 - c. En déduire $f(10)$ puis $f(5)$.

Partie 3 : ET POUR FINIR ...

Déterminer $f(2026)$. On pourra utiliser les résultats précédents. Toute trace de recherche sera valorisée. La valeur exacte de $f(2026)$ est attendue, mais, à défaut, un encadrement de $f(2026)$ sera valorisé.

Exercice 3 (pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale) :
DIVISEURS STRICTS

Dans cet exercice, on ne travaillera qu'avec des entiers positifs non nuls.

Rappel : Un **nombre premier** a est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers : 1 et a .

Par exemple : 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

4 n'est pas premier car il a trois diviseurs : 1, 2 et 4.

En revanche, 2 est premier car il a exactement deux diviseurs : 1 et 2.

De même, 23 est premier.

Définition : Un **diviseur strict** d'un entier non nul a est un diviseur de a strictement positif et différent de a .

Ainsi, par exemple, les diviseurs stricts de 10 sont : 1, 2 et 5.

Partie 1 : PREMIERS RÉSULTATS

1. Pour chacun des entiers naturels 4 ; 18 et 25, donner la liste de ses diviseurs stricts.
2. Les nombres premiers n'ont qu'un seul diviseur strict. Lequel et pourquoi ?
3. Quel est le seul entier naturel qui n'a pas de diviseur strict ?
4. Soient b et c deux entiers positifs non nuls. L'affirmation suivante est-elle vraie : « si b est strictement supérieur à c , alors b admet plus de diviseurs stricts que c . » ? Justifier la réponse.

Partie 2 : NOMBRE DE DIVISEURS STRICTS

1. Recopier et compléter le tableau suivant sans justifier :

| | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| Nombre a | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Nombre de diviseurs stricts de a | | | | | | | | | | | | |

2. Quel est le plus petit entier naturel ayant exactement deux diviseurs stricts ?
Quel est celui ayant exactement quatre diviseurs stricts ?
3. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le nombre de diviseurs stricts du nombre 2^n .
On pourra utiliser les règles de calcul sur les puissances qui permettent de justifier par exemple que 2^3 est un diviseur de 2^{10} car $2^{10} = 2^3 \times 2^7$.
4. Soit a un entier naturel. L'affirmation suivante est-elle vraie ? « Si a admet un nombre pair de diviseurs stricts, alors a est toujours le carré d'un entier. » Justifier la réponse.

Partie 3 : LES TROIS PLUS GRANDS DIVISEURS STRICTS

- On remarque que la somme des trois plus grands diviseurs stricts du nombre 12 est strictement supérieure à 12. Citer un autre nombre ayant cette propriété.
- Voici un script et l'affichage obtenu pour les valeurs $n=12$ et $n=16$:

Script

```
n=int(input("nombre entier choisi = "))
k=n-1
S=0
c=0
while k>0:
    if n%k==0 and c<3:
        c=c+1
        S=S+k
        k=k-1
    else:
        k=k-1
print("S=",S)
```

En langage Python, $a\%b$ donne le reste de la division euclidienne de a par b .

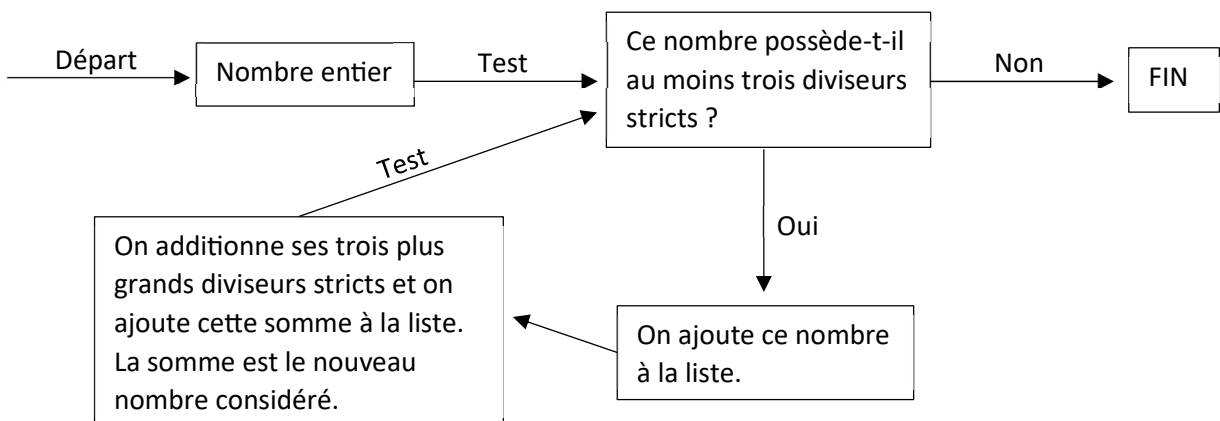
Affichage

```
nombre entier choisi = 12
S= 13
nombre entier choisi = 16
S= 14
```

Expliquer le rôle de ce programme.

Que représentent les valeurs de k dans ce programme ?

- Justifier que la somme des trois plus grands diviseurs stricts de 2^{10} est strictement inférieure à 2^{10} .
 - Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Justifier que la somme des trois plus grands diviseurs stricts de 2^n est strictement inférieure à 2^n .
- On fabrique une liste d'entiers de la façon suivante :



Une telle liste peut être vide ou contenir un nombre fini ou infini d'entiers.

- On choisit 6 comme nombre entier de départ. Justifier que la liste ainsi fabriquée est infinie et qu'elle ne comporte que des 6.
- On choisit 10 comme nombre entier de départ. Donner la liste ainsi fabriquée.
- Montrer que, peu importe le multiple de 12 non nul choisi comme nombre entier de départ, le deuxième élément de la liste est strictement supérieur au premier.

Annexes exercice 1 (pour tous) : À rendre avec la copie

NOMS :

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
|--|--|--|--|

Prénoms :

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
|--|--|--|--|

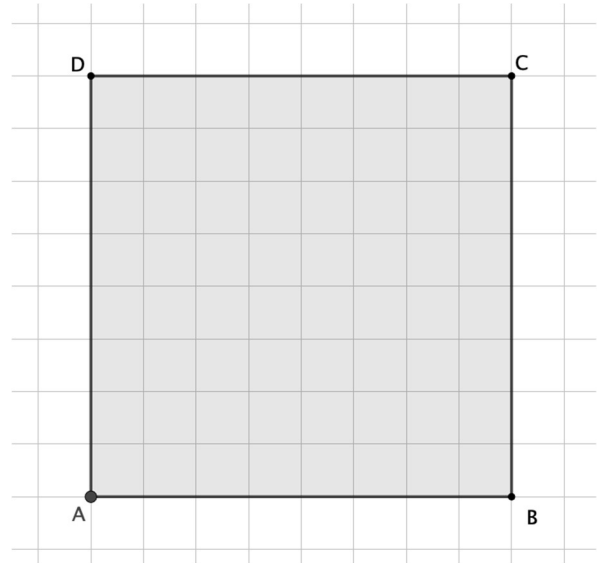
Nom de l'établissement :

Ville :

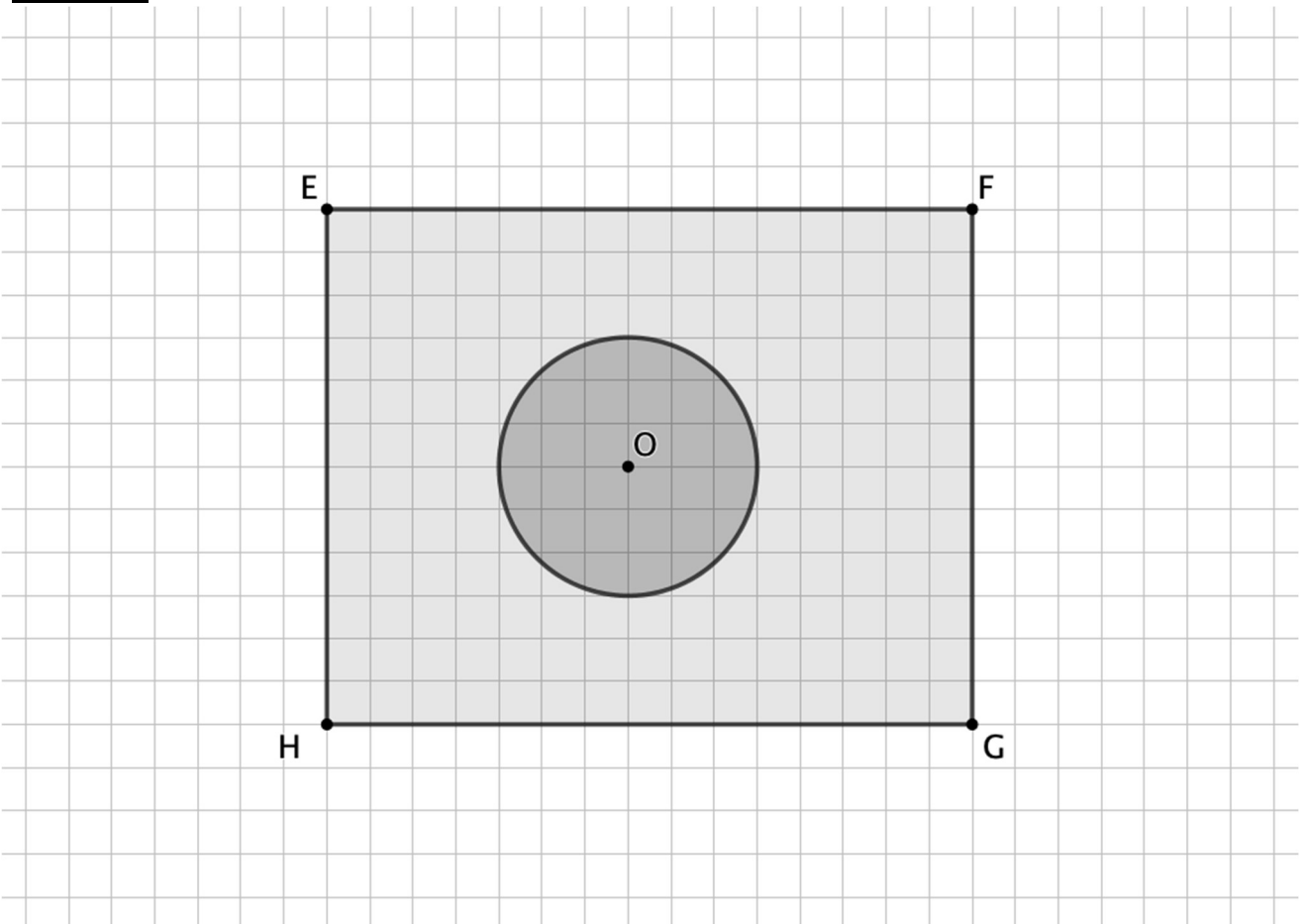
Numéro de groupe :

Dans les quatre annexes, les carreaux représentent des carrés de côté 1 dm.

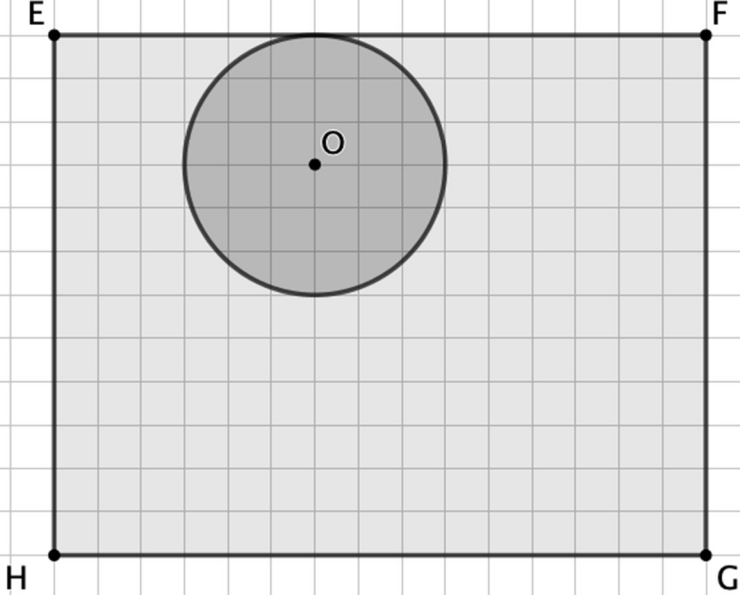
Annexe 1 :



Annexe 2 :



Annexe 3 :



Annexe 4 :

