Olympiades académiques de mathématiques 2019

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Académie de Rennes

Mercredi 13 mars 2019

-Seconde Partie de 10h00 à 12h00-

Epreuve par équipes de 2 ou 3 candidats

Le concours se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents**.

La seconde partie est résolue en équipes de 2 ou 3 candidats : une seule copie par équipe, portant les noms de tous les membres de l'équipe, est remise à la fin de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur : le « mode examen » n'a pas à être activé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Les équipes de candidats de série S traiteront les exercices numéros 1 (*Carrés magiques*), 2 (*La mosquée de Cordoue*) et 3 (*Énigmathiques…*), celles des autres séries traiteront les exercices numéros 1 (*Carrés magiques*) et 4 (*Mariages parfaits*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Carrés magiques

On appelle carré magique d'ordre n, un tableau de n lignes et n colonnes dont les cases contiennent tous les nombres entiers de 1 à n^2 et tel que sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur les deux diagonales, la somme soit identique.

Exemple : carré magique d'ordre 4

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Partie 1 : Carrés magiques d'ordre 3

1. Dans un carré magique d'ordre 3, quels entiers doit-on inscrire ?

2. Compléter sans justifier le carré magique ci-dessous.

2	9	
7	5	

3. Trouver deux autres exemples de carrés magiques d'ordre 3.

4. Montrer que la somme commune sur chaque ligne et chaque colonne d'un carré magique d'ordre 3 est égale à 15.

5. On considère un carré magique d'ordre 3. On note S la somme des nombres aux quatre coins du tableau et c le nombre inscrit dans la case centrale.

a. Montrer que : $S + 2c = 30$.
b. Montrer que : $2\,S + (45 - S - c) = 60$.
c. En déduire S et c.
d. Peut-on avoir un nombre impair dans l'un des coins du carré magique ?

6. Donner sans justification les carrés magiques d'ordre 3 manquants.

Partie 2 : D'autres carrés magiques

1. Montrer qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.

2. Quelle(s) propriété(s) peut-on établir sur les carrés magiques d'ordre 4 ?

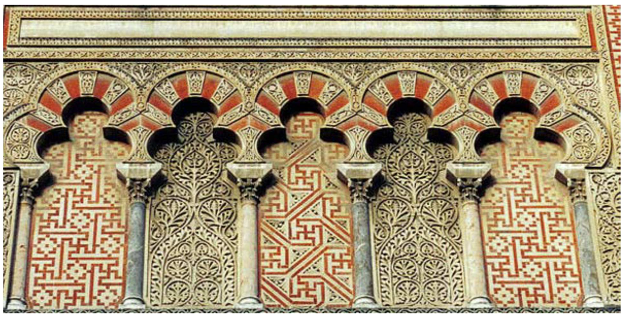
Dans cette question, toutes les traces d'initiatives et tous les résultats même partiels seront valorisés s'ils sont correctement rédigés, conjecturés et/ou justifiés.

Exercice académique numéro 2 (spécifique aux séries S)

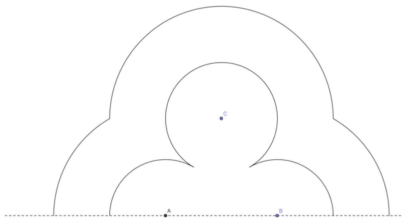
La mosquée de Cordoue

Partie 1 : Construction d'un arc trilobé

Voici une photo de l'une des portes de la façade est de la mosquée-cathédrale de Cordoue. Les arcs qui apparaissent sont « trilobés » c'est-à-dire formés de trois « feuilles » ou « lobes ».



Arc trilobé



Les centres des trois arcs de cercle constituant l'intérieur de l'arc trilobé sont les sommets d'un triangle équilatéral et les points de contact de ces trois arcs sont les milieux des côtés du triangle.

Les arcs de cercle constituant l'extérieur ont les mêmes centres que les arcs intérieurs et un rayon double de celui des arcs intérieurs. Leurs points de contact appartiennent aux médianes du triangle équilatéral.

Sur la copie, construire un tel arc trilobé à partir d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, en laissant les traits de construction apparents.

Partie 2 : Calcul de la proporción cordobesa

En Andalousie, on a identifié, dans la mosquée de Cordoue et ailleurs, un nombre analogue au nombre d'or, la *« proporción cordobesa »*. Ce nombre est défini comme le quotient du rayon d'un cercle par le côté de l'octogone régulier inscrit dans ce cercle.

1. Sur la copie, construire un octogone régulier $ABCDEFGH$ inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 4 cm.

2. Par définition, la *proporción cordobesa* vaut $\alpha = \dfrac{OA}{AB}$.

a. Donner une mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$.

b. Démontrer que $\alpha = \dfrac{1}{2\sin(22,5°)}$.

3. Démontrer qu'une écriture de α est : $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$.

Exercice académique numéro 3 (spécifique aux séries S)

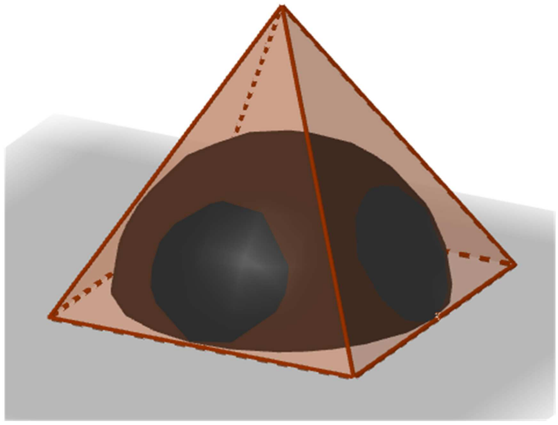
Énigmathiques…

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 : Pyramide et demi-sphère

On considère une pyramide à base carrée dont toutes les arêtes ont pour mesure a.

Quel est le rayon de la plus grande demi-sphère contenue dans la pyramide ayant pour centre, le centre du carré ?



Partie 2 : Anniversaires

Charlotte, Kilian et Jeanne ont cette année leur anniversaire pendant la Semaine des mathématiques (qui est justement cette semaine). Leur professeur de mathématiques affirme qu'il y a plus de 40 % de chances que deux d'entre eux aient leur anniversaire le même jour. A-t-il raison ?

Exercice académique numéro 4 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Mariages parfaits

On considère les ensembles d'entiers naturels suivants :

$$M_1 = \{1 ; 2\}$$
$$M_2 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$$
$$M_3 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$
$$\ldots$$
$$M_n = \{1 ; 2 ; \ldots ; 2n\}$$

On appelle « couple dans un ensemble M_n » un couple constitué de deux nombres distincts de M_n, le plus petit étant écrit en premier.
Exemples : (2 ; 4) est un couple dans M_2 mais (2 ; 5) et (4 ; 1) n'en sont pas.

Un couple parfait dans un ensemble M_n est un couple constitué de deux nombres distincts dont la somme est un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'un nombre entier.
Exemple : le couple (1 ; 3) est un couple parfait dans M_4 car $1 + 3 = 4 = 2^2$.

Un mariage dans M_n consiste à créer des couples avec tous les éléments de M_n (chaque nombre n'étant en couple qu'avec un seul autre).
Exemples : - dans M_2, on peut faire le mariage : (1 ; 3), (2 ; 4) ;
- dans M_3, on peut faire le mariage : (4 ; 6), (1 ; 5), (2 ; 3).

On dit qu'un mariage dans M_n est parfait lorsque tous les couples du mariage sont parfaits.
Exemple : le mariage (1 ; 3), (2 ; 4) n'est pas un mariage parfait dans M_2.

1. Recherche de mariages parfaits dans les premiers ensembles.

a. Montrer que l'on ne peut pas faire de mariage parfait dans M_2.
b. Montrer que l'on peut faire un mariage parfait dans M_4.
c. Montrer que dans M_5, puis dans M_6, on ne peut pas faire de mariage parfait.

2. Cas de l'ensemble M_8.

a. Après avoir observé que M_8 contient tous les éléments de M_4, trouver un mariage parfait dans M_8.
b. Montrer que dans M_8 on ne peut pas faire un autre mariage parfait.

3. Trouver un mariage parfait dans M_{12}.

4. Trouver un mariage parfait dans M_{16}.

5. Montrer que M_{24} possède au moins deux mariages parfaits.