MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2022

Rennes-Zone Afrique australe et orientale

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents.**

La seconde partie est constituée des exercices académiques et résolue en équipes de 2 ou 3 candidats : **une seule copie par équipe**, portant les noms de tous les membres de l'équipe, est remise à la fin de l'épreuve.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde Partie

Exercices académiques

Epreuve en équipe

La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les équipes de candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres équipes de candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par toutes les candidats)

2022, année stylée

Gwenolé s'intéresse aux triplets d'entiers naturels notés (m ; n ; p) vérifiant les propriétés suivantes :

- $m \leq n \leq p$
- $m^2 + n^2 + p^2 = 2022$

Quand un triplet vérifie ces deux propriétés, on dit qu'il est **stylé**.

On rappelle les propriétés suivantes :

- *si un entier k est pair alors k^2 est pair, et réciproquement* ;
- *si un entier k est impair alors k^2 est impair, et réciproquement* ;
- *si x et y sont des réels positifs avec $x \leq y$ alors $x^2 \leq y^2$* ;
- *si x et y sont des réels positifs avec $x \leq y$ alors $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.*

Partie I - Quelques exemples

1. Les triplets (23 ; 7 ; 38), (10 ; 25 ; 36) et (7 ; 23 ; 38) sont-ils stylés ?
2. Existe-il des triplets stylés de la forme (m ; m ; m) ?
3. Gwenolé se demande s'il existe des triplets stylés de la forme (0 ; n ; p). Pour cela, il utilise le tableau de valeurs de sa calculatrice avec la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2022 - x^2}$.
Qu'en déduit-il sur l'existence de triplets stylés de la forme (0 ; n ; p) ?
4. Existe-t-il des triplets stylés de la forme (1 ; n ; p) ?
5. Comment Gwenolé peut-il affirmer, sans calculer $10^2+25^2+36^2$, que le triplet (10 ; 25 ; 36) n'est pas stylé ?

Partie II - Parité chez les stylés ?

Gwenolé s'intéresse à la parité de m, n et p où (m ; n ; p) est un triplet stylé.

1. Peut-on avoir parmi m, n et p deux nombres pairs et un nombre impair ?
2. Montrer que ces entiers ne peuvent pas être des nombres impairs tous les 3.
3. Démontrer que m, n et p ne peuvent pas être des nombres pairs tous les 3.
4. Conclure.
5. Montrer que l'entier pair du triplet stylé ne peut pas être un multiple de 4.

Partie III - Comptez les stylés et programmez-les !

1. Dans cette question, on pourra utiliser des inégalités et des résultats des parties précédentes.
On considère un triplet stylé (m ; n ; p).

a. Comment choisir n et p pour que m ait la plus grande valeur possible ? En déduire que : $2 \leq m \leq 25$.
b. Par un raisonnement analogue, montrer que : $26 \leq p \leq 44$.
c. Par un raisonnement analogue, montrer que : $7 \leq n \leq 31$.

2. Combien de triplets vérifient les trois inégalités précédentes ?
3. Ne voulant pas tester un à un tous ces triplets, Gwenolé décide d'écrire un programme sur sa calculatrice pour déterminer lesquels sont des triplets stylés. Il en trouve 7.
Donner les 7 triplets stylés trouvés par Gwenolé.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Léa et Zoé chez Zola

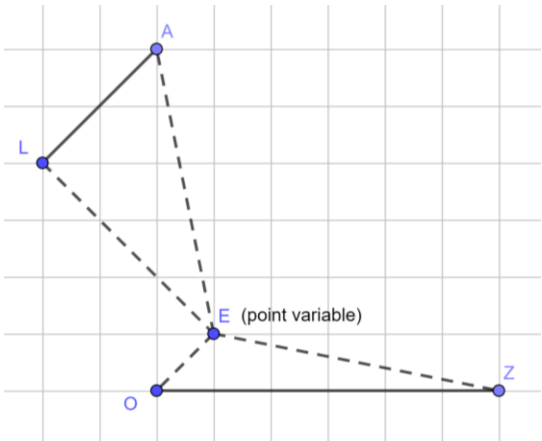
Rappels
- *Tout triangle rectangle est inscrit dans le cercle de diamètre son hypoténuse.*
- *Dans un repère orthonormé, si on a deux points* $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$*, alors*
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}.$$

Dans le terrain schématisé ci-contre, chaque carreau est un carré de côté un mètre.

Deux amies, Zoé et Léa, veulent délimiter deux parcelles pour cultiver des fraises.

Elles ont déjà planté les piquets, notés O, A, L et Z.

Elles placent ensuite un cinquième piquet, noté E, **<u>à l'intérieur du quadrilatère ZOLA</u>** qui permet de délimiter deux parcelles triangulaires : ZOE pour Zoé et LEA pour Léa.



Pour qu'aucune des deux amies ne soit lésée (perdante), il serait souhaitable que les deux parcelles ainsi créées aient la même aire.

Dans les questions **1.** à **3.**, on étudie d'abord différentes positions du point variable E notées E_1, E_2 et E_3.

On appelle I *le milieu du segment* [OZ] *et* J *le milieu du segment* [AL].

1. <u>Cas n°1</u> : Placer <u>sur l'annexe</u> le point E_1 situé sur le segment [OA] tel que $\mathrm{OE}_1=1{,}5$ m. Justifier que dans ce cas, aucune des deux amies n'est lésée.

2. <u>Cas n°2</u> : Construire <u>sur l'annexe</u>, en expliquant, le point E_2 tel que les triangles $\mathrm{LE}_2\mathrm{A}$ et ZOE_2 soient isocèles en E_2. Sans justifier, dire quelle amie vous semble lésée dans ce cas.

3. <u>Cas n°3</u> : Existe-t-il un point E_3 tel que le triangle $\mathrm{LE}_3\mathrm{A}$ soit isocèle en E_3 et le triangle ZOE_3 soit rectangle en E_3? Si oui, placer ce point E_3 <u>sur l'annexe</u> et dire, sans justifier, quelle amie vous semble lésée dans ce cas.

4. <u>Cas n°4</u> : Est-il possible que les deux triangles LEA et ZOE soient rectangles en E ? Expliquer.

Pour la suite, on se place dans le repère orthonormé d'origine O *tel que* $\mathrm{A}(0\,;6)$, $\mathrm{L}(-2\,;4)$ *et* $\mathrm{Z}(6\,;0)$.
Le point E *a une position indéterminée mais on impose que ses coordonnées soient deux **réels positifs**.*

*Pour les deux questions suivantes **5.** et **6.** on note* $\mathrm{E}(x\,;y)$ *avec* x *et* y *réels positifs.*

5. a. Montrer que AE = LE si, et seulement si, le point E appartient à la droite d'équation $y=-x+4$.
b. Donner une équation de la médiatrice du segment [OZ].
c. En déduire les coordonnées du point E_2 défini à la question **2**.
d. Déterminer alors quelle amie est lésée dans le **cas n°2**.

6. **a.** Montrer que les coordonnées x et y du point E_3 défini à la question **3.** vérifient : $(x-3)^2 + y^2 = 9$.
(*On pourra admettre ce résultat pour la suite*).
b. En déduire que l'abscisse du point E_3 vérifie l'équation $x^2 - 7x + 8 = 0$.
c. Sachant que l'aire du triangle $\mathrm{LE_3A}$ vaut approximativement 4,88 m², déterminer quelle amie est lésée dans le **cas n°3**.

7. *Pour cette question, on note* $\mathrm{E}(a\,;b)$ *avec a et b réels positifs.*
Les triangles ZOE et LEA sont deux triangles quelconques.
a. Montrer que H, le projeté orthogonal de E sur la droite (AL) a pour coordonnées $\left(\frac{a+b-6}{2}\,;\,\frac{a+b+6}{2}\right)$.
(*On pourra admettre ce résultat pour la question suivante*).
b. Démontrer qu'aucune amie n'est lésée si le point E est sur une droite, dont on donnera une équation, et que l'on tracera sur l'annexe.

Exercice 3 (à traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Énigmes…

Les réponses aux énigmes devront être soigneusement justifiées.

I - Énigme 1

Lors d'un jeu, une équipe peut marquer des buts à la main ou au pied. Elle remporte 5 points pour un but marqué à la main et 3 points pour un but marqué au pied.

1. On peut atteindre le score de 28 points de différentes manières. Lesquelles ?
2. Seuls certains scores ne peuvent pas être atteints. Lister ces scores et expliquer pourquoi.

II - Énigme 2

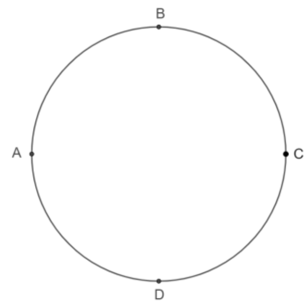
On sait que :

- C est un entier positif ;
- Si on multiplie l'entier C par un entier F, on a $\mathrm{C} \times \mathrm{F} = 10^{13}$;
- Les entiers C et F ne finissent pas par 0 ;
- Les entiers C et F vérifient l'inégalité C < F.

Quel est l'entier C ?

III - Énigme 3

Quatre points A, B, C et D ont été placés sur un cercle comme indiqué sur la figure ci-contre. On se déplace sur ce cercle en passant d'un point au point le plus proche.



1. Dans un premier temps, on lance une pièce de monnaie équilibrée.

- Si le résultat est « Face », le déplacement se fait dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Sinon, le déplacement se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On part d'un point quelconque.
a. Quelle est la probabilité d'être de retour à ce point après 2 lancers ?
b. Quelle est la probabilité d'être de retour à ce point après 7 lancers ?

2. Dans un deuxième temps, on lance de nouveau une pièce de monnaie équilibrée.

- Si le résultat est « Face », on effectue un seul déplacement dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Sinon, on effectue deux déplacements successifs dans le sens des aiguilles d'une montre.

a. On part d'un point quelconque. Quelle est la probabilité d'être de retour à ce point après 2 lancers ?
b. De quel point faut-il partir pour avoir le plus de chance d'arriver en A après 4 lancers ?

3. Dans un troisième temps, on lance un dé équilibré à 6 faces et on effectue le nombre de déplacement(s) indiqué par le dé, uniquement dans le sens des aiguilles d'une montre.

On part d'un point quelconque. Quelle est la probabilité d'être de retour à ce point après 2 lancers ?

Annexe de l’exercice 2

(à rendre)