MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2023

Académie de Rennes

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La seconde partie est constituée des exercices académiques et résolue en équipes de 2 ou 3 candidats : **une seule copie par équipe**, portant les noms de tous les membres de l'équipe, est remise à la fin de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde Partie

Exercices académiques

Epreuve par équipes de 2 ou 3 candidats

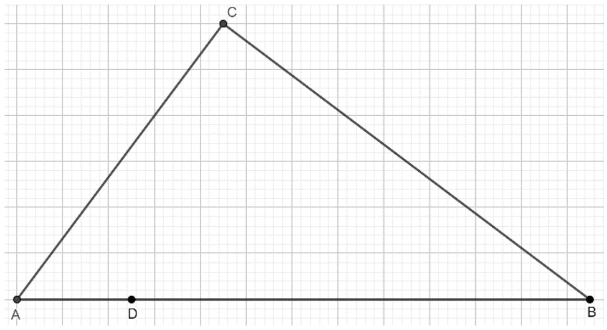
La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les équipes de candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres équipes de candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Exercice 1 (pour tous les candidats) : Simon et ses cinq enfants

Simon veut partager son terrain triangulaire noté *ABC* entre ses cinq enfants et ceci de manière équitable : les cinq parts doivent avoir toutes la même aire.
Simon envisage trois types de partage.



Les dimensions de son terrain sont données sans unité : $AB = 25$, $BC = 20$ et $AC = 15$.
On note *D* le point situé sur le segment $[AB]$ tel que $AD = 5$.

Etude du terrain

1. Le terrain de Simon *ABC* est-il un triangle rectangle ?
2. Quelle est l'aire *S* du triangle *ABC* ? En déduire l'aire attribuée à chaque enfant.
3. On appelle *H* le pied de la hauteur issue du sommet *C*. En déduire que la hauteur *CH* du triangle *ABC* est égale à 12.

Un premier partage

4. Simon place sur le segment $[AB]$ trois points P_1, Q_1 et R_1, distincts tels que
$AD = DP_1 = P_1Q_1 = Q_1R_1 = R_1B$ = 5.
Démontrer qu'il obtient cinq parts triangulaires de même aire et tracer sur l'annexe 1-A ce partage.

Un deuxième partage

5. Simon place trois points P_2, Q_2, et R_2. P_2 est sur le segment $[BC]$ tel que $BP_2 = 5$. Q_2 est sur le segment $[CD]$ tel que $CQ_2 = \frac{1}{3}CD$. R_2 est milieu du segment $[DP_2]$. Le triangle ACD forme une part, c'est-à-dire une partie du triangle ABC qui a pour aire $\frac{1}{5}$ de l'aire du triangle ABC.

a. Montrer que la hauteur issue de P_2 dans le triangle BP_2D est égale à 3 et en déduire que ce triangle forme une deuxième part.

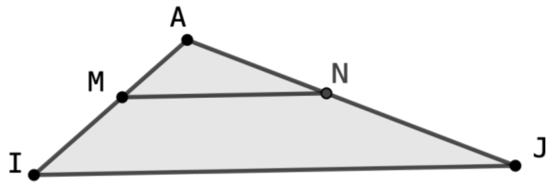
b. Tracer sur l'annexe 1-B le partage que Simon envisage.

c. Démontrer qu'il est équitable.

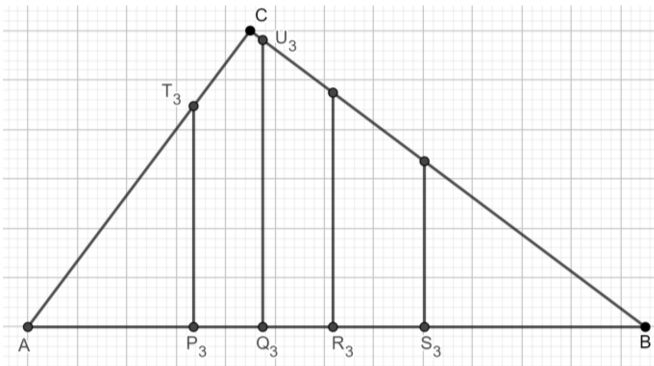
Aide : Deux triangles ayant la même hauteur et leurs bases proportionnelles ont aussi leurs aires dans la même proportion.

Un troisième partage

<u>Aide</u> : Dans la situation ci-contre on dit que l'on a une configuration de Thalès car les droites (IJ) *et* (MN) *sont parallèles. Si* $\frac{\text{Aire du triangle } AIJ}{\text{Aire du triangle } AMN} = k$ *alors* $\frac{AI}{AM} = \sqrt{k}$.



6. Simon souhaite que les séparations entre les parts soient des segments perpendiculaires à la droite (AB). Il place successivement quatre points P_3, Q_3, R_3 et S_3 distincts et alignés dans cet ordre sur le segment $[AB]$ puis il trace quatre segments perpendiculaires à (AB) pour définir ainsi cinq parts de même aire comme sur la figure ci-dessous.



a. La première part est nommée AP_3T_3 avec T_3 situé sur $[AC]$.
   Démontrer que $P_3T_3 = \frac{4}{3}AP_3$ et en déduire que $AP_3 = 3\sqrt{5}$.

b. On considère que la deuxième part est le pentagone $P_3Q_3U_3CT_3$ avec U_3 situé sur $[BC]$.
   Déterminer la distance BQ_3.

c. Déterminer les distances BR_3 *et* BS_3.

Exercice 2 (pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques de la voie générale) : L'extinction n'est pas inévitable

Dans cet exercice, on veut estimer la probabilité d'extinction d'une espèce, en s'appuyant sur un modèle introduit par Francis Galton et William Watson à la fin du 19ième siècle.

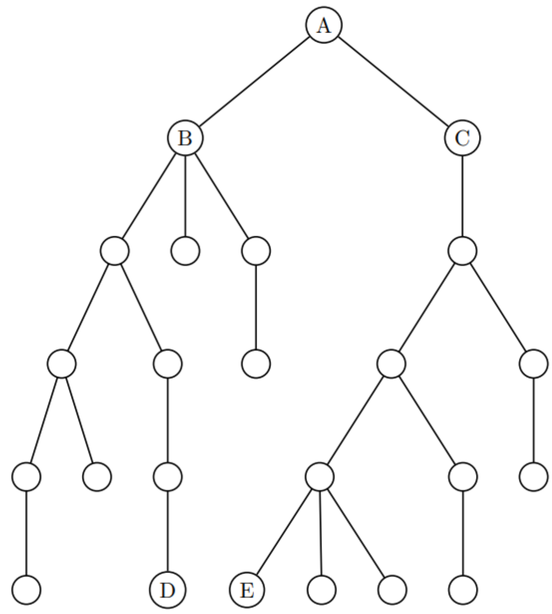
Partie A

Dans cette partie, on suppose que chaque individu a au cours de sa vie :

- aucun descendant direct avec une probabilité de $\frac{1}{7}$;
- un descendant direct avec une probabilité de $\frac{3}{7}$;
- deux descendants directs avec une probabilité de $\frac{2}{7}$;
- trois descendants directs avec une probabilité de $\frac{1}{7}$.

Les probabilités du nombre de descendants d'un individu sont donc de fait indépendantes d'un individu à l'autre.

L'arbre généalogique ci-contre est un exemple qui illustre cette loi (ce n'est pas un arbre de probabilité).



Par exemple : l'individu A a eu 2 descendants directs : B et C ; l'individu B a eu 3 descendants directs et l'individu C en a eu 1.

1. Etude de la descendance à partir de l'exemple ci-dessus.
Le chemin qui va de l'individu A au descendant D est décrit par la liste suivante des tailles des fratries successives : (2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 1).

a. Décrire ainsi, à partir de l'arbre fourni, le chemin qui mène de l'individu A à son descendant E.

b. L'individu E est un descendant de l'individu A à la 5ième génération.
Sur cet exemple, combien de descendants à la 5ième génération l'individu A possède-t-il ?

2. Etude de la descendance dans le cas général.

A partir d'un ancêtre unique, quel est le nombre maximal de descendants possibles après 4 générations, toutes générations comprises ?

3. Probabilité d'extinction : La probabilité d'extinction de la branche d'un individu à la première génération est $\frac{1}{7}$, c'est la probabilité qu'il n'ait pas de descendant direct.

a. Justifier que si un individu a n descendants (n =1, 2 ou 3), la probabilité que sa branche s'éteigne dès la génération suivante est $\frac{1}{7^n}$.

b. Justifier que la probabilité qu'un individu ait deux descendant directs, puis que sa branche s'éteigne à la génération suivante est : $\frac{2}{343}$.

c. Déterminer la probabilité d'extinction de la branche d'un individu à la deuxième génération, c'est-à-dire la probabilité qu'un individu n'ait pas de « petits enfants ». *On donnera la valeur sous forme de fraction et de pourcentage arrondi à 0,1 près.*

4. Notons q_n la probabilité d'extinction de la branche d'un individu à la *n-ième* génération. Ainsi $q_1 = \frac{1}{7}$ et q_2 a été calculé à la question 3c.

On admet que le terme q_n est défini pour tout $n \geq 1$ à partir de la formule de récurrence :

$$q_{n+1} = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}q_n + \frac{2}{7}q_n^2 + \frac{1}{7}q_n^3 = f(q_n).$$

La fonction f étant celle qui associe à tout réel de l'intervalle $[0; 1]$ son image :

$$f(x) = \frac{1}{7}(1 + 3x + 2x^2 + x^3)\ .$$

a. On a construit en annexe 2 la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

On a placé le point associé à la valeur $q_1 = \frac{1}{7}$ sur l'axe des abscisses. On souhaite ici construire, sur l'axe des abscisses, les points associés aux premières valeurs *de* q_n sans les calculer.

À l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, construire le nombre q_2 sur l'axe des ordonnées.

A l'aide de la droite $\mathscr{D}$, reporter la valeur de q_2 sur l'axe des abscisses.

b. Construire de la même façon sur l'axe des abscisses les nombres q_3 et q_4 en laissant apparents les traits de construction.

c. On s'intéresse à la probabilité que la descendance d'un individu s'éteigne à un moment. La construction ci-contre permet-elle de conjecturer une réponse ?

5. A l'aide de la calculatrice et en précisant la méthode, donner une valeur approchée de q_{14} à 10^{-3} près.

6. Au vu des résultats précédents, nous admettons que la probabilité d'extinction à terme est la solution notée α de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0; 1[$.

a. Montrer que 1 est une solution de l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que pour tout x on a l'égalité :

$$f(x) - x = \frac{1}{7}(x-1)(x^2 + 3x - 1)$$

c. En déduire la valeur de α et conclure quant à la probabilité que la descendance d'un individu s'éteigne.

Partie B *Toute trace de recherche sera valorisée*

Dans cette partie, on souhaite généraliser la situation précédente afin d'obtenir un résultat général.

On pose que chaque individu a au cours de sa vie :

- aucun descendant direct avec une probabilité de p_0 ;
- un descendant direct avec une probabilité de p_1 ;
- deux descendants directs avec une probabilité de p_2 ;
- trois descendants directs avec une probabilité de p_3 .

Un individu n'a jamais plus de trois descendants directs. Ces probabilités sont non nulles.

1. Déterminer la valeur de $p_0 + p_1 + p_2 + p_3$.
2. Notons q_n la probabilité d'extinction de la branche d'un individu à la *n-ième* génération. Ainsi $q_1 = p_0$.

On admet qu'on a pour tout entier *n* non nul : $q_{n+1} = f(q_n)$ avec $f(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$

a. Démontrer que pour tout x on a : $f(x) - x = (x-1)(p_3x^2 + (p_2 + p_3)x - p_0)$

b. Comme dans la **partie A** , on appelle α l'unique solution positive différente de 1 de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de α en fonction de p_0, p_2 et p_3.

c. Le nombre moyen de descendants directs pour chaque individu est : $m = p_1 + 2p_2 + 3p_3$

Démontrer que $\alpha \geq 1$ si et seulement si $m \leq 1$.

d. Que peut-on en conclure sur le lien entre le nombre moyen de descendants directs par individu et l'extinction ?

Exercice 3 (pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

On considère un nombre entier naturel.

On calcule la somme des carrés des chiffres qui le composent.

On répète ensuite indéfiniment le même procédé avec le nouveau nombre obtenu.

Ceci nous donne une suite de nombres.

- Si l'on obtient 1 dans cette suite, le nombre est dit **singulier**.
- Si la suite ne contient jamais le nombre 1, le nombre initial est dit **pluriel**.

Prenons par exemple le cas de 94 :

$9^2 + 4^2 = 97$; $9^2 + 7^2 = 130$; $1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$; $1^2 + 0^2 = 1$; $1^2 = 1$ ...

La suite commence donc par 94, 97, 130, 10, 1, 1, … donc le nombre 94 est un nombre singulier.

Le but de ce problème est d'étudier la singularité d'un maximum de nombres compris entre 0 et 109.

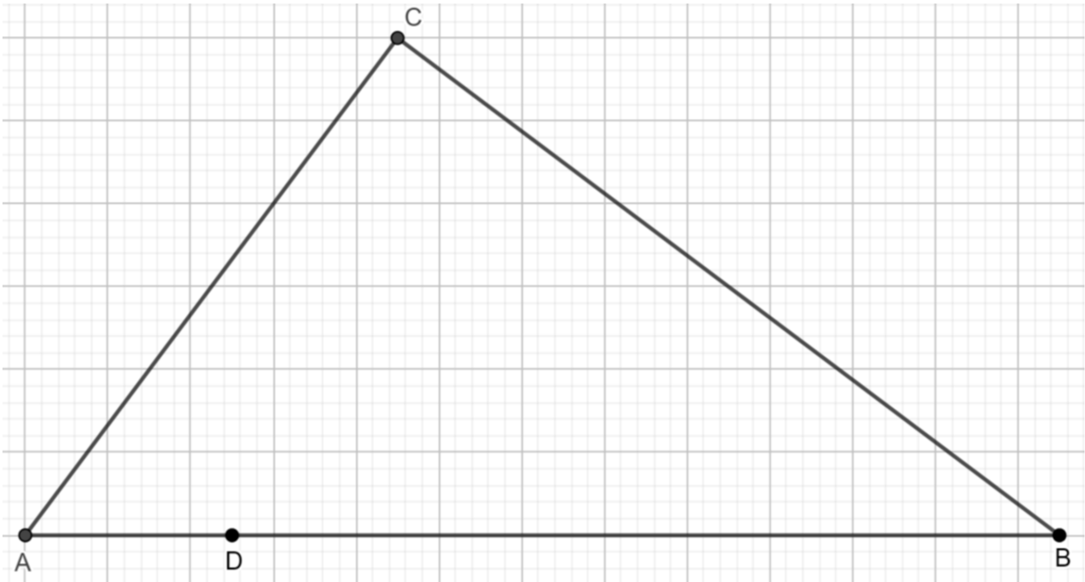
Alexia, qui n'aime pas trop les calculs, essaye d'en effectuer le moins possible.

Elle a préparé pour cela une grille que vous trouverez en annexe 3.

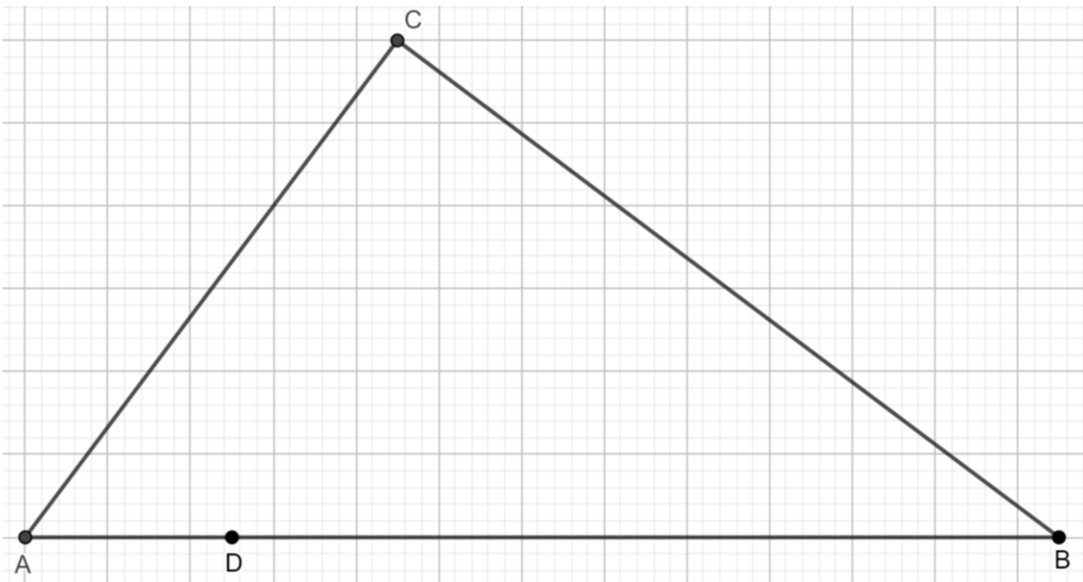
Au fur et à mesure des questions, vous entourerez les nombres singuliers et barrerez les nombres pluriels de cette grille.

1. Le nombre 0 est-il singulier ou pluriel ? Qu'en est-il du nombre 1 ?
2. Pourquoi y a-t-il une infinité de nombres singuliers dans $\mathbb{N}$?
3. Expliquer pourquoi le nombre 2 est pluriel.
4. Alexia affirme qu'étant donné que 94 est singulier, alors 49 l'est aussi.
   Justifier son affirmation.
5. Sans faire de nouveaux calculs, donner neuf nombres pluriels entre 0 et 50 (on expliquera la démarche).
6. Sans faire de nouveaux calculs, donner cinq nombres singuliers entre 0 et 50 (on expliquera la démarche).
7. Déterminer la liste des nombres singuliers inférieurs ou égaux à 20 en faisant le moins de calculs possible. Vous décrirez les raisonnements qui vous ont permis d'y parvenir sur votre copie.
8. Déterminer si 2023 est un nombre singulier ou pluriel.
9. 2019 était la dernière « année singulière ». Quelle sera la prochaine « année singulière » ?
   Profiter de cette question pour compléter votre grille.

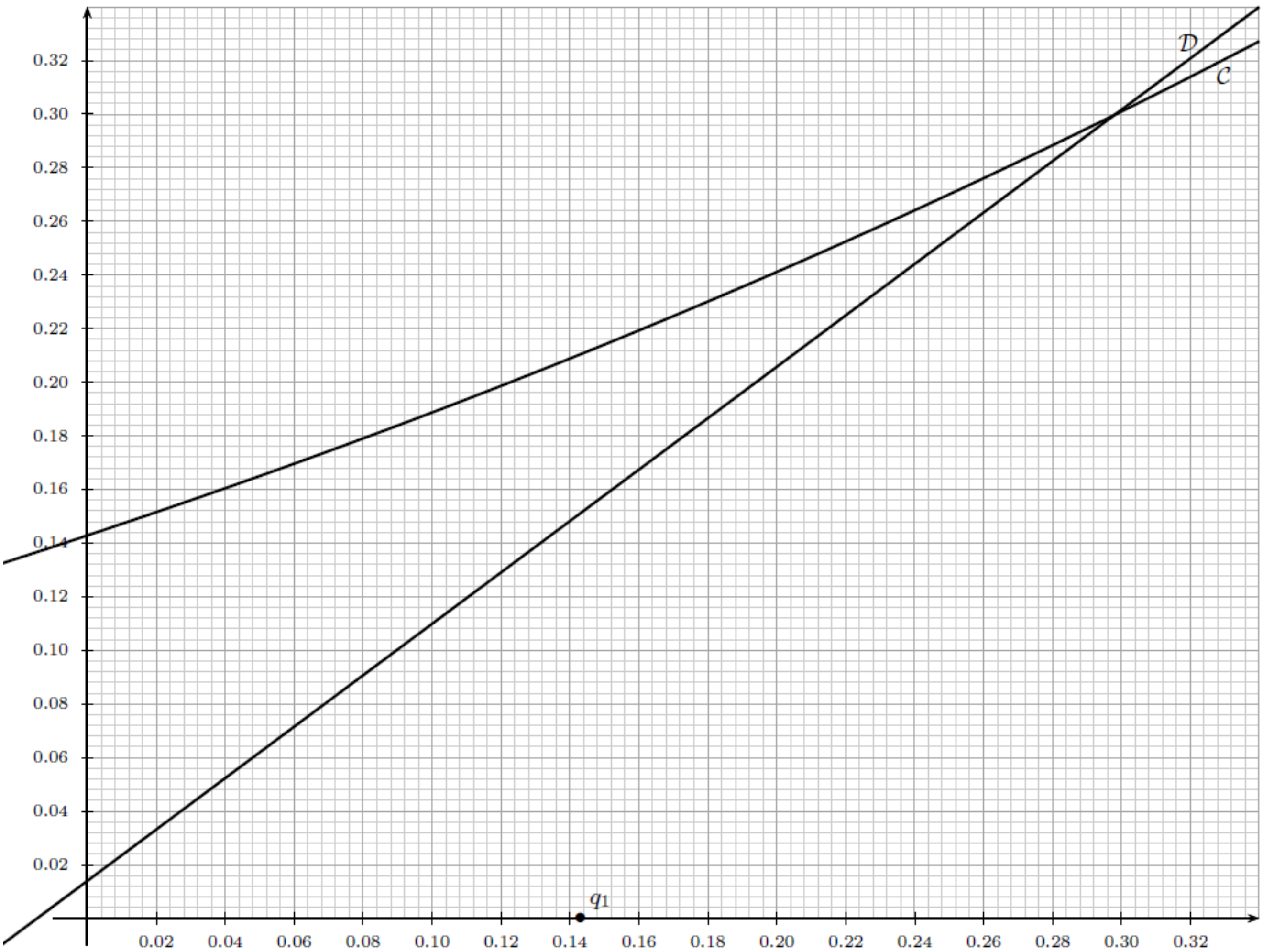
Annexe 1-A : Exercice 1, question 4



Annexe 1-B : Exercice 1, question 5.b.



Annexe 2 : Exercice 2



Annexe 3 : Exercice 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109