CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

FONCTIONS : généralités

images, antécédents, courbes représentatives (PAGE 1/3)

Exercice 1 page 142 :

a. 2 a pour image -6 par la fonction f : $f(2) = -6$
b. 5 est un antécédent de 0 par f : $f(5) = 0$
c. La courbe passe par le point A(-1 ;3) : $f(-1) = 3$

Exercice 3 page 142 :

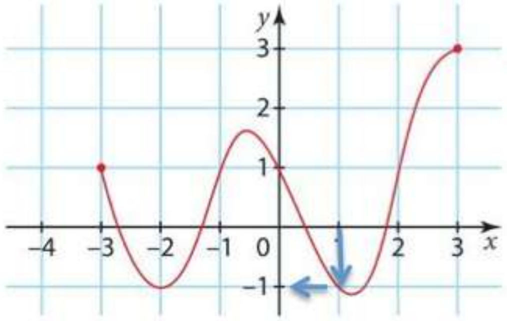
Les flèches bleues permettent de lire l'image de 6
Les flèches rouges permettent de lire les antécédents de 1

Exercice 15 page 143 :

Images ou antécédents	$f(x) = y$	Courbe $\mathcal{C}$
3 a pour image -1	$f(3) = -1$	$\mathrm{D}(3; -1) \in \mathcal{C}$
2 a pour image 5 5 est l'image de 2 2 est un antécédent de 5 5 a pour antécédent 2	$f(2) = 5$	$\mathrm{E}(2; 5) \in \mathcal{C}$
1 a pour image -2 -2 est l'image de 1 1 est un antécédent de -2 -2 a pour antécédent 1	$f(1) = -2$	$\mathrm{A}(1; -2) \in \mathcal{C}$
-5 a pour image 3 3 est l'image de -5 -5 est un antécédent de 3 3 a pour antécédent -5	$f(-5) = 3$	$\mathrm{F}(-5; 3) \in \mathcal{C}$
0 est un antécédent de 4	$f(0) = 4$	$\mathrm{G}(0; 4) \in \mathcal{C}$
-2 a pour image 4 4 est l'image de -2 -2 est un antécédent de 4 4 a pour antécédent -2	$f(-2) = 4$	$\mathrm{B}(-2; 4) \in \mathcal{C}$

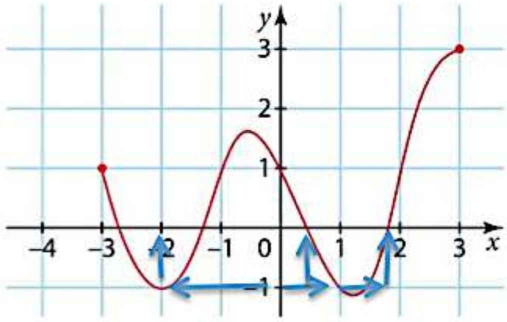
CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL
FONCTIONS : généralités
images, antécédents, courbes représentatives (PAGE 2/3)

Exercice 50 page 148 :

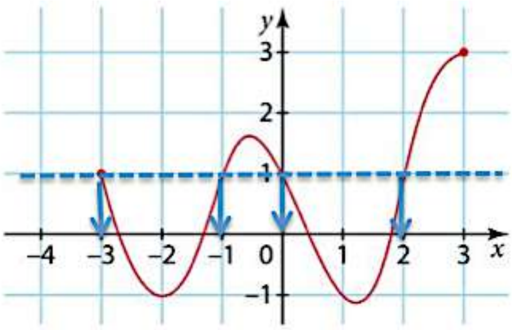


1. a) si $x = 1$, alors $f(x) = -1$
vrai

b) si $x = 1$ alors $f(x) = 0$
faux



c) si $f(x) = -1$, alors $x = -2$
faux, x pourrait aussi être environ égal à 0,4 ou 1,8



d) si $f(x) = 1$ alors $x = -3$, ou $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 2$
vrai

2. les réciproques :
a) si $f(x) = -1$, alors $x = 1$ **faux** x pourrait aussi être égal à -2 par exemple
b) si $f(x) = 0$, alors $x = 1$ **faux**
c) si $x = -2$, alors $f(x) = -1$ **vrai**
d) si $x = -3$, ou $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 2$, alors $f(x) = 1$ **vrai**

Exercice 2 page 142 :
Il suffit de remplacer x par -1 et de voir si on obtient 2 :
Si $x = -1$ alors $x^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$
Donc le point A(-1 ;2) appartient à la courbe qui représente la fonction $x \mapsto x^2 + 1$

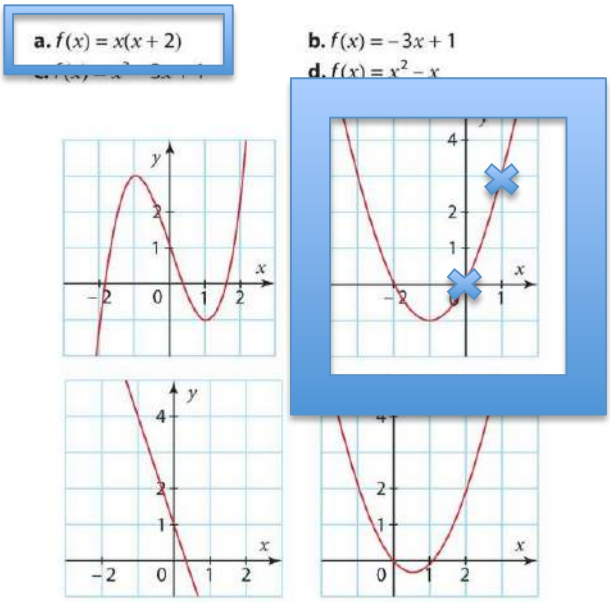
Exercice 14 page 143 :
1. Par la fonction f, -2 a pour image 6 : $f(-2) = 6$
2. 2 est l'image de 0 par la fonction f : $f(0) = 2$
3. le point A(2 ;-3) appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$: $f(2) = -3$
4. Le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3 a pour ordonnées 5. $f(3) = 5$
5. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère : $f(0) = 0$
6. La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 3 et -1 : $f(3) = 0$ et : $f(-1) = 0$

CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL
FONCTIONS : généralités
images, antécédents, courbes représentatives (PAGE 3/3)

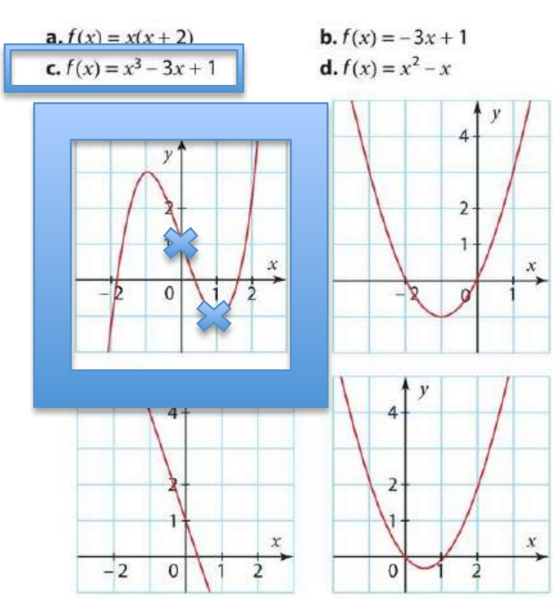
<u>Exercice 5 page 142 :</u>

Il suffit de tester quelques valeurs de x et de regarder si les points correspondants sont sur les courbes proposées :

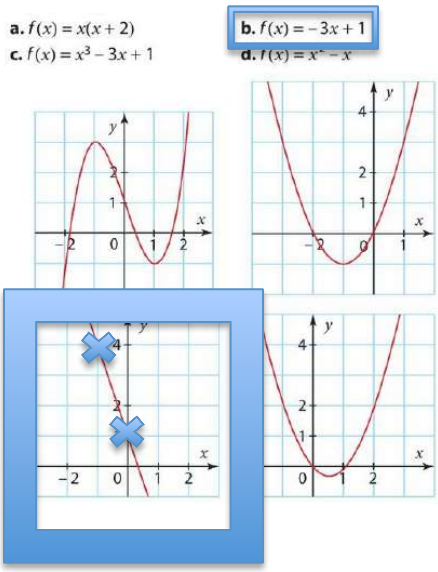
Si $x = 0$ alors $x(x + 2) = 0\times(0 + 2) = 0\times2 = 0$
Si $x = 1$ alors $x(x + 2) = 1\times(1 + 2) = 1\times3 = 3$



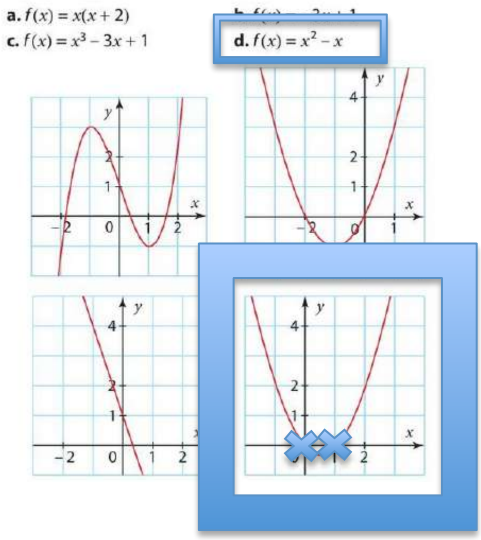
Si $x = 0$ alors $x^3 - 3x + 1 = 0^3 - 3\times0 + 1 = 1$
Si $x = 1$ alors $x^3 - 3x + 1 = 1^3 - 3\times1 + 1 = -1$



Même méthode : on trouve que :
Si $x = 0$ alors $-3x + 1 = 0 + 1 = 1$
Si $x = -1$ alors
$-3x + 1 = -3\times(-1) + 1 = 3 + 1 = 4$



Si $x = 0$ alors $x^2 - x = 0^2 - 0 = 0$
Si $x = 1$ alors $x^2 - x = 1^2 - 1 = 0$



CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

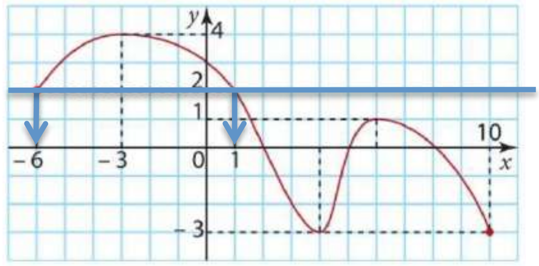
FONCTIONS : généralités

Résolutions graphiques (PAGE 1/3)

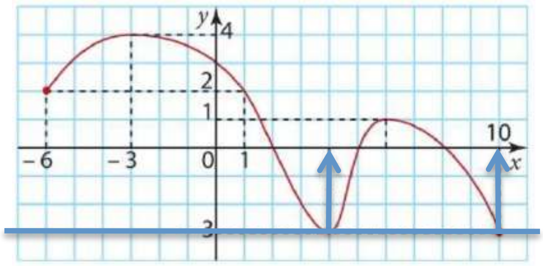
Exercice 31 page 145 :

1.

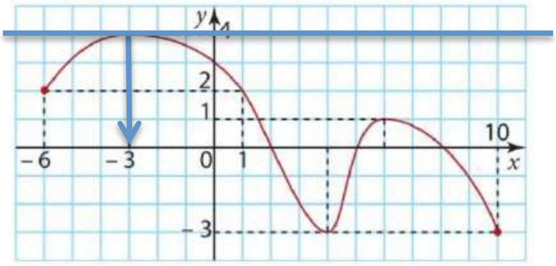
a. $f(x) = 2$ S = {–6; 1}



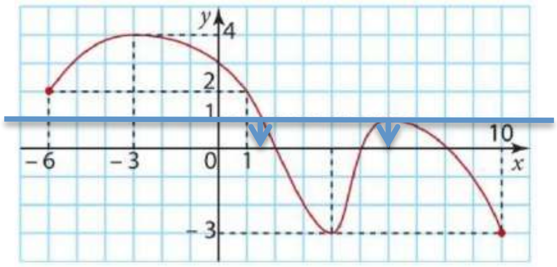
b. $f(x) = -3$ S = {4; 10}



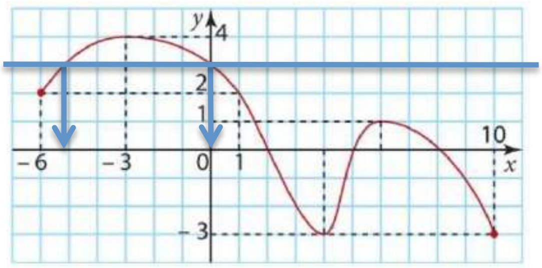
c. $f(x) = 4$ S = {–3}



d. $f(x) = 1$ S = {1,5; 6}



2. L'équation $f(x) = 3$ possède deux solutions qui sont, à la précision de lecture graphique près : –5,2 et 0.



Exercice 32 page 245 :

a. *S={1 ; 3}*

b. *S={-4 ; 0 ; 4}*

c. S={-3}

d. pas de solution

e. 1 solution : -1,5 environ

f. -3, 0 et 5 sont les solutions car ce sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

FONCTIONS : généralités

Résolutions graphiques (PAGE 2/3)

Exercice 24 page 170 :

1. L'image de 1 est 3.   L'image de 5 est -1.   L'image de 0 est 4

2. $f(-2) = 3$. $f(-3) = 0$

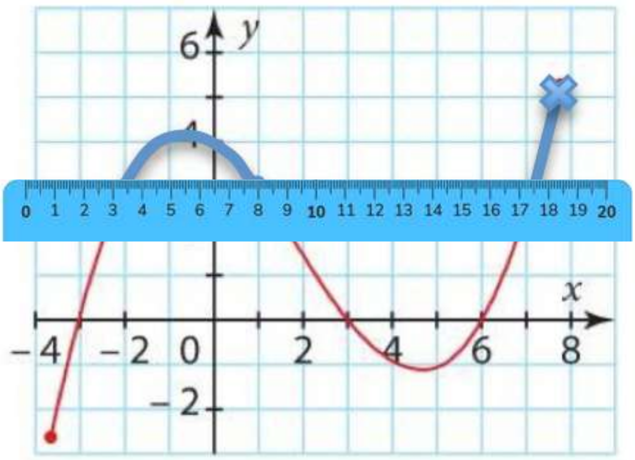
3. a. Pour résoudre $f(x) > 3$, on peut placer une règle horizontalement sur le graphique à l'ordonnée 3. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite d'équation $y = 3$ (matérialisée par la règle) et la courbe.

On a surligné ces points en bleu sur la figure.

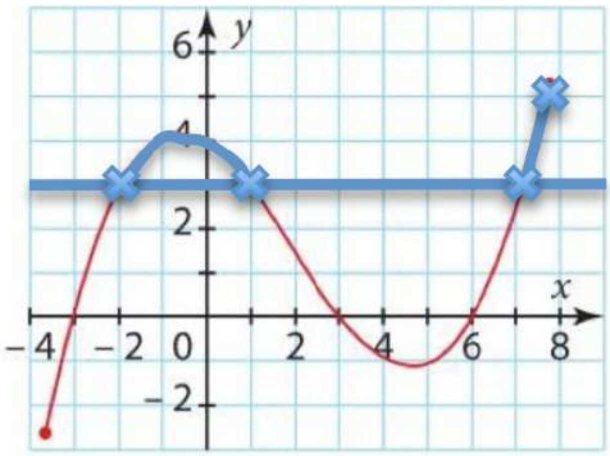
-2, 1 et 7,1 ne sont pas des solutions car leur image est égale à 3

En revanche, 7,8 est solution car son image est strictement supérieure à 3.

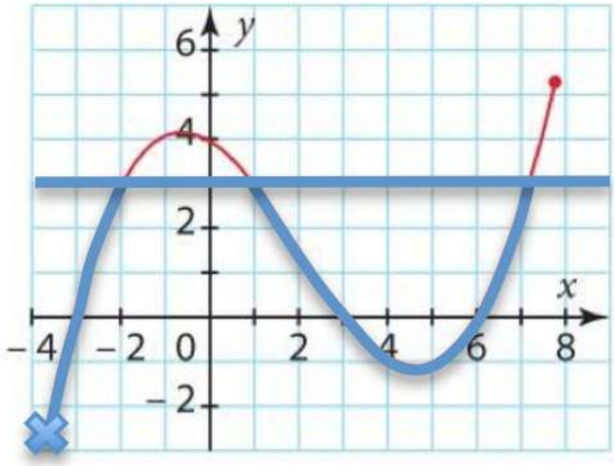
$f(x) > 3$ S= $]-2\,;1[\, \cup\,]7{,}2\ ;\ 7{,}8]$



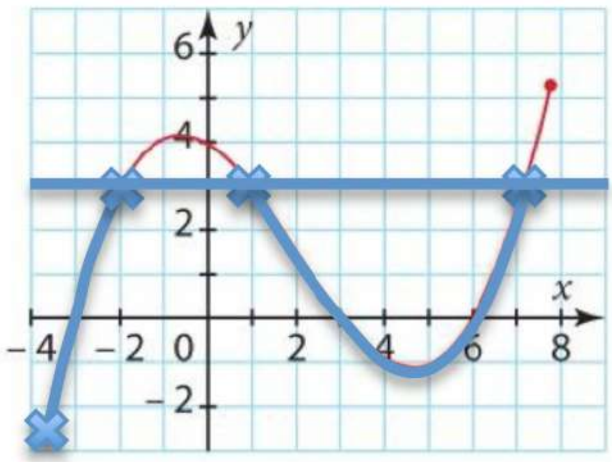
b. $f(x) \geq 3$ S= $[-2\,;1] \cup [7{,}2\ ;\ 7{,}8]$



c. $f(x) < 3$ S= $[-3{,}8\,;-2[\, \cup\,]1\,;\ 7{,}2[$



d. $f(x) \leq 3$ S= $[-3{,}8\,;-2] \cup [1\,;\ 7{,}2]$



CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

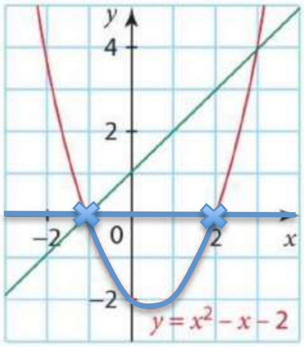
FONCTIONS : généralités

Résolutions graphiques (PAGE 3/3)

<u>Exercice 29 page 170 :</u>

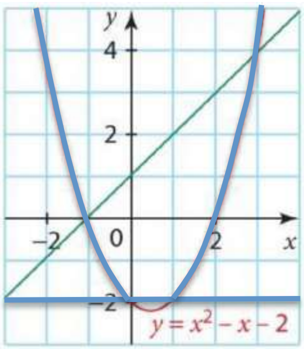
a. $x^2 - x - 2 \leq 0$

S = $[-1\,;2]$



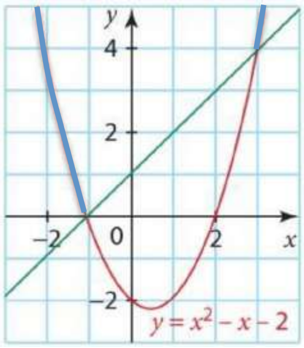
b. $x^2 - x - 2 > -2$

S = $[-2{,}3\,;0[\,\cup\,]1\,;\,3{,}2]$



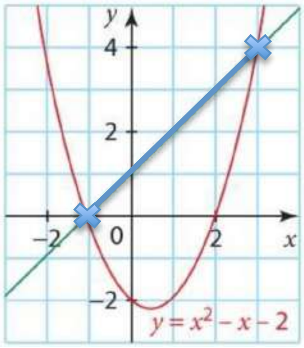
c. $x^2 - x - 2 > x + 1$

S= $[-2{,}3\,;\,-1[\,\cup\,]3\,;3{,}2]$



d. $x + 1 \geq x^2 - x - 2$

S = $[-1; 3]$



CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

FONCTIONS : généralités

Tableaux (PAGE 1/2)

Exercice 6 page 142 :

f est décroissante sur [-2;1] et f est croissante sur [1;5].

De plus, on apprend que $f(-2) = 6$, $f(1) = -3$ et $f(5) = 13$.

Exercice 17 page 143 :

courbe rouge

La fonction est décroissante sur [-4 ;-2] et croissante sur [-2 ;3].

x	-4		-2		3
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4

Son maximum est 4, il est atteint en 3.

Son minimum est -2, il est atteint en -2

courbe bleue

La fonction est décroissante sur [-4 ;-1] et croissante sur [-1 ;5].

x	-4		-1		5
$g(x)$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Son maximum est 3, il est atteint en 5.

Son minimum est -1, il est atteint en -1

Exercice 20 page 169 (début):

1. $f(0)$ est positif $f(-4)$ est négatif $f(7,3)$ est négatif

-4 0 7,3

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a. $f(x) < 0$ S= $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $f(x) \leq 0$ S= $]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

FONCTIONS : généralités

Tableaux (PAGE 2/2)

Exercice 20 page 169 (fin):

c. $f(x) > 0$ S= $]2; 1[$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d. $f(x) \geq 0$ S= $[2; 1]$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 21 page 169 :

x	-5		-3		-2		1		6
$f(x)$	4	↘	0	↘	-3	↗	0	↘	-2

a. $f(x) = 0$
S=$\{-3; 1\}$

x	-5		-3		-2		1		6
$f(x)$	4	↘	0	↘	-3	↗	0	↘	-2

b. $f(x) \leq 0$
S=$[-3; 6]$

x	-5		-3		-2		1		6
$f(x)$	4	↘	0	↘	-3	↗	0	↘	-2

c. $f(x) > 0$
S=$[-5; -3[$

Exercice 28 page 170 :

x	-3	-2	0		4	7	$+\infty$
$f(x)$	0	↗ 1	4	↘	1	↗ 4	

a. $f(x) < 1$ S= $[-3; -2[$

b. $f(x) > 4$ S= $]7; +\infty[$

c. $f(x) \geq 0$ S= $[-3; +\infty[$

CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

FONCTIONS : généralités

Algorithmique (PAGE 1/1)

Prendre un nombre entre 0 et 5.
Calculer son double.
Soustraire 4 au résultat obtenu.
Calculer le carré du résultat obtenu.

Prendre un nombre entre 0 et 5.
Soustraire 4 à ce nombre.
Calculer le double du résultat obtenu.
Calculer le carré du résultat obtenu.

Prendre un nombre entre 0 et 5.
Calculer le carré de ce nombre.
Calculer le double du résultat obtenu
Soustraire 4 au résultat obtenu.

La fonction f est définie sur [0 ;5] par $f(x) = 2x^2 - 4$

La fonction f est définie sur [0 ;5] par $f(x) = (2x - 4)^2$

La fonction f est définie sur [0 ;5] par $f(x) = (2(x - 4))^2$

```
from math import *
def f(x):
  if x<0 or x>5:
    reponse="pas d'image"
  else:
    resultat=2*x
    resultat=resultat-4
    resultat=resultat**2
    reponse=resultat
  return reponse
```

```
from math import *
def f(x):
  if x<0 or x>5:
    reponse="pas d'image"
  else:
    resultat=x**2
    resultat=resultat*2
    resultat=resultat-4
    reponse=resultat
  return reponse
```

```
from math import *
def f(x):
  if x<0 or x>5:
    reponse="pas d'image"
  else:
    resultat=x-4
    resultat=resultat*2
    resultat=resultat**2
    reponse=resultat
  return reponse
```

Prendre un nombre entre -5 et 10
Calculer le triple de ce nombre
Ajouter 1 au résultat obtenu
Élever au cube le résultat précédent.

La fonction est définie sur [-5 ;10] par :

$$f(x) = (3x + 1)^3$$

```
from math import *
def f(x):
  if x<-5 or x>10:
    reponse="pas d'image"
  else:
    resultat=x*3
    resultat=resultat+1
    resultat=resultat**3
    reponse=resultat
  return reponse
```

CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

FONCTIONS : généralités

Modéliser à l'aide d'une fonction (PAGE 1/2)

Exercice 12 page 143 :

1.a. La fonction T indique la tension (en Volts)

b. La variable est le temps (en secondes)

c. L'ensemble de définition est [0 ; 0,6]

2. A(0,05 ; 2) appartient à la courbe :

a. au bout de 0,05 secondes, le condensateur en charge a une tension de 2V.

b. 2 est l'image de 0,05 par la fonction T.

ou bien 0,05 a pour image 2 par la fonction T

ou bien 0,05 est un antécédent de 2 par la fonction T

ou bien 2 a pour antécédent 0,05 par la fonction T

3. L'antécédent de 4 est 0,17 environ. Il faut environ 0,17 seconde pour que le condensateur en charge atteigne une tension de 4V.

4. L'image de 0,3 est 4,6 environ. Au bout de 0,3 secondes, le condensateur en charge a une tension de 4,6V

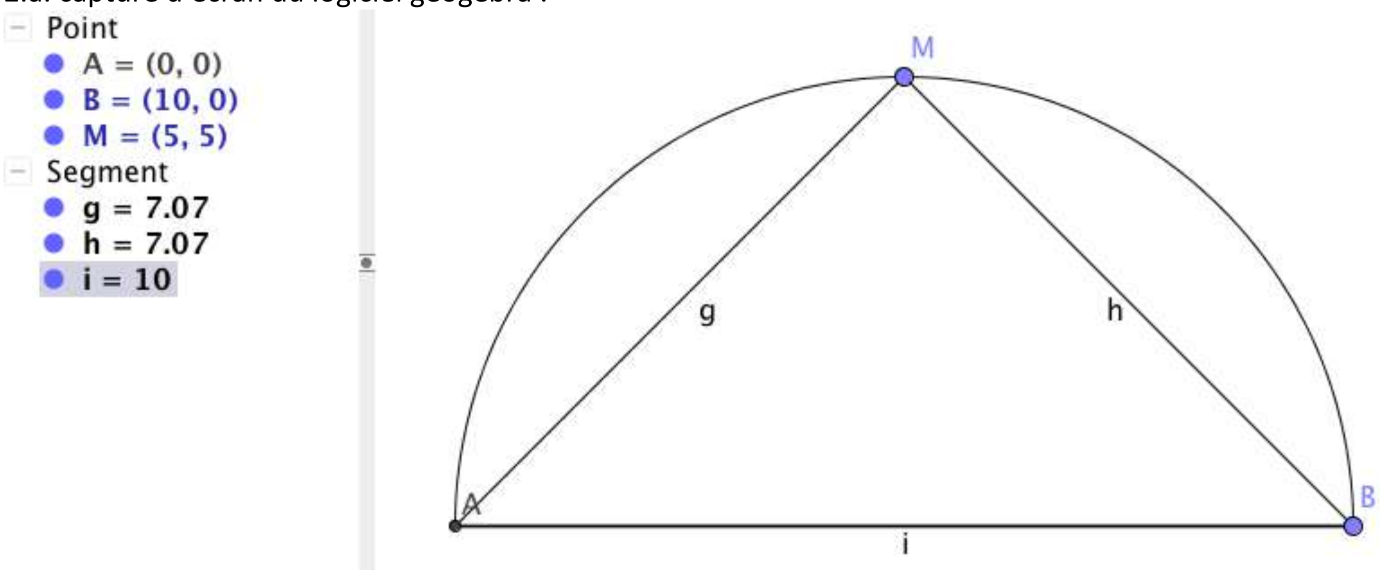
Exercice 28 page 144 :

1.a. Quand AM vaut 1, l'aire vaut 4,9749

b. *f* est croissante sur l'intervalle [0 ;7] et décroissante sur l'intervalle [7 ;10]

c. L'aire maximale est égale à 24,995. Elle est atteinte quand AM vaut 7.

2.a. capture d'écran du logiciel géogébra :



b. Dans le triangle rectangle et isocèle en M, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AB^2=AM^2+MB^2$

Or AB=10 et AM=MB

Donc on obtient : $10^2=2AM^2$

C'est à dire $100=2AM^2$

Et donc $50=AM^2$ et $AM=\sqrt{50} \approx 7{,}07$

L'aire est égale à : $\frac{bas \times hauteur}{2} = \frac{AM \times MB}{2} = \frac{\sqrt{50} \times \sqrt{50}}{2} = \frac{50}{2} = 25$

CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL
FONCTIONS : généralités
Modéliser à l'aide d'une fonction (PAGE 2/2)

Exercice 34 page 146 :
1.a. $f(0) = 5$
Cela correspond bien aux 5000 (5 milliers) de bactéries introduites au départ.

b. Au bout de 2 h il y aurait 3000 bactéries ($f(2) = 3$)

c. $f(t) = 0$ pour $t \geq 9$
Au bout de 9h, les bactéries auront totalement disparu

2. $f(5) \approx 1{,}2$
Il y avait 5000 bactéries au début, il faudrait que ce nombre soit divisé par 5 en moins de 5 heures.
Or d'après ce graphique, après 5h, il y a encore environ 1,2 milliers de bactéries.
Il n'est donc pas jugé efficace.

Exercice 38 page 171 :
1. a. L'image de 1 par la fonction f est $f(1) = 1^2 = 1$ tandis que l'image de 1 par la fonction g est $g(1) = -4\times1 + 21 = 17$
On en déduit que la courbe rouge représente f (la demande) tandis que la bleue représente g (l'offre).

b. La demande (modélisée par la fonction f qui est croissante) augmente quand le prix augmente.
L'offre (modélisée par la fonction g qui est décroissante) diminue quand le prix augmente.
Remarque : On peut s'étonner de cette situation ! En général, quand un prix augmente, les consommateurs en achètent moins, c'est à dire que la demande diminue. Ce problème n'est pas très crédible…

2. $f(2{,}5) = 2{,}5^2 = 6{,}25$. Pour un prix de 2,5€, la demande est de 6,25 centaines d'objets, c'est à dire 625.
$g(2{,}5) = -4\times2{,}5 + 21 = -10 + 21 = 11$. Pour un prix de 2,5€, l'offre est de 11 centaines, c'est à dire 1100 objets.

3. Le prix d'équilibre correspond à l'abscisse du point d'intersection des deux courbes : c'est 3.
Le prix d'équilibre est de 3€.
La quantité produite est alors de 9 centaines d'objets.
On peut vérifier ce résultat par le calcul : $f(3) = 3^2 = 9$ et $g(3) = -4\times3 + 21 = -12 + 21 = 9$

4. a. à partir de 3€, la demande dépasse l'offre.
b. $f(x) - g(x) = x^2 - (-4x + 21) = x^2 + 4x - 21$
Par ailleurs , développons l'expression proposée :
$$(x + 2)^2 - 25 = x^2 + 4x + 4 - 25 = x^2 + 4x - 21$$
Donc l'égalité annoncée est vraie.

c. $f(x) = g(x)$ revient donc à $(x + 2)^2 - 25 = 0$ c'est à dire $(x + 2)^2 = 25$
Or le carré d'un nombre est égal à 25 si et seulement si le nombre est égal à 5 ou -5.
Dans le contexte, on écarte la valeur -5.
$x + 2 = 5$ a pour solution $x = 3$

CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL
FONCTIONS : généralités
Pour aller plus loin (PAGE 1/3)

Exercice 52 page 149 :

Figure a :

Quand M se déplace de A vers B, la longueur CM augmente.

Quand M est en A, la longueur CM est égale à CA c'est à dire 3. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à 0.

Quand M est en B, la longueur CM est égale à CB c'est à dire $\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}\approx 6{,}7$. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à 6.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		6
$f(x)$	3	$\nearrow$	$\sqrt{45}$

Figure b :

Quand M se déplace de A vers C, la longueur CM diminue. Puis Quand M se déplace de A vers C, la longueur CM augmente.

Quand M est en A, la longueur CM est égale à CA c'est à dire 3. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à 0.

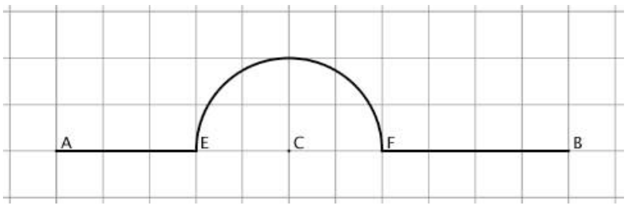
Quand M est en C, la longueur CM est égale à CC c'est à dire 0. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à 3.

Quand M est en B, la longueur CM est égale à CB c'est à dire 6. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à 9.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		3		9
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	6

Figure c :



Quand M se déplace de A vers E, la longueur CM diminue. Puis Quand M se déplace de E vers F, la longueur CM est constante. Enfin, quand M se déplace de F vers B, la longueur CM augmente.

Quand M est en A, la longueur CM est égale à CA c'est à dire 5. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à 0.

Quand M est en E, la longueur CM est égale à CE c'est à dire 2. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à 3.

Suite de l'exercice 52 page 149 :

Quand M est en F, la longueur CM est égale à CF c'est à dire 2. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à 3+la longueur du demi cercle c'est à dire $3+\frac{2\times\pi\times2}{2}=3+2\pi$.
Quand M est en B, la longueur CM est égale à CB c'est à dire 6. Cela correspond à une longueur parcourue sur [AB] égale à $3+2\pi+4$ c'est à dire $7+2\pi$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	3	$3+2\pi$	$7+2\pi$
$f(x)$	5	2	2	6

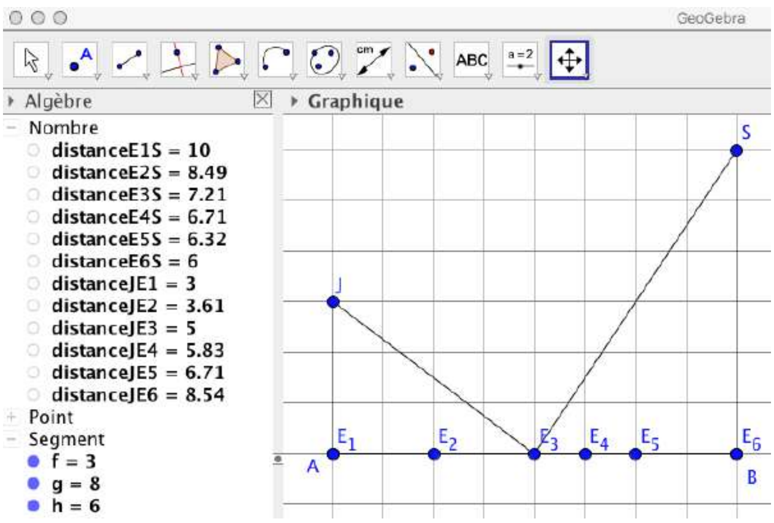
Exercice 53 page 149 :

M appartient au côté [AC] donc x varie entre 0 et la longueur AC.

* Quand M est en A, le parallélogramme CMNQ est plat : M et N sont confondus avec A et Q est confondu avec C. L'aire de AMN est égale à 0, ainsi que l'aire du parallélogramme MNQC. En revanche, l'aire de NQB est égale à l'aire du triangle ABC.
L'étude de ce premier cas permet d'affirmer que la courbe verte correspond à l'aire de NQB.

* Quand M est en C, le parallélogramme est plat : M et C sont confondus et N et B sont confondus. L' aire du parallélogramme MNQC est égale à 0. L'aire de AMN est égale à l'aire du triangle ABC.
L'étude de ce deuxième cas permet de différencier les courbes rouges et bleues : la courbe rouge correspond à l'aire de AMN, tandis que la courbe bleue correspond à l'aire du parallélogramme MNQC.

Exercice 60 page 151 :



On peut compléter le tableau demandé en mesurant sur le dessin:

AE	0	2	4	5	6	8
Longueur sur le dessin en cm	13	12,1	12,2	12,5	13	14,5
Longueur du trajet en m	130	121	122	125	130	145

CORRECTION DES EXERCICES DU PLAN DE TRAVAIL

FONCTIONS : généralités

Pour aller plus loin (PAGE 3/3)

<u>Suite du N° 60 page 151 :</u>

2. On peut poser x la longueur en m entre A et E. x varie donc entre 0 et 80.

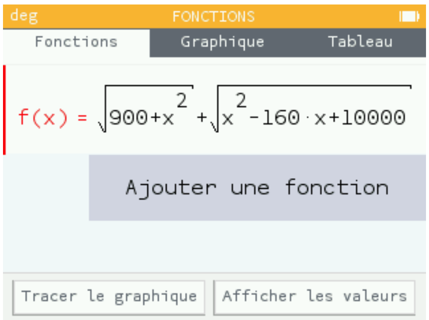
La longueur JE est égale à $\sqrt{JA^2 + AE^2} = \sqrt{30^2 + x^2} = \sqrt{900 + x^2}$

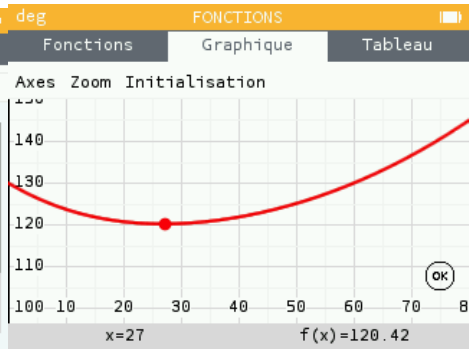
La longueur ES est égale à $\sqrt{EB^2 + BS^2} = \sqrt{(80 - x)^2 + 60^2} = \sqrt{80^2 - 2\times 80\times x + x^2 + 3600} =$
$\sqrt{x^2 - 160x + 10000}$

On pose donc $L(x) = \sqrt{900 + x^2} + \sqrt{x^2 - 160x + 10000}$

L'ensemble de définition est [0 ;80]

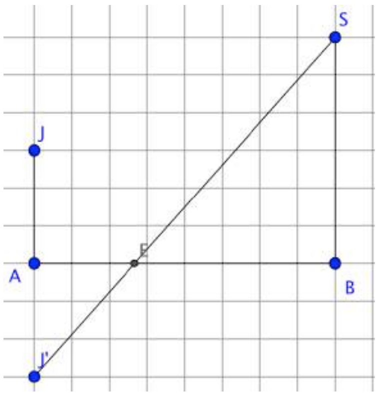
3. On peut utiliser la calculatrice :





La distance minimale semble d'environ 120,4 ; elle est atteinte quand E est à 27 m de A.

4. a.



b. Si J' est le symétrique de J par rapport à la droite (AB), la longueur EJ est égale à EJ'.

Le trajet J-E-S a donc la même longueur que celui J'-E-S. Or le chemin le plus court du point J' au point S est la ligne droite. Le trajet minimal est atteint quand E appartient au segment [J'S].

c. Les droites (AJ') et (BS) sont parallèles ; (AB) et (J'S) sont sécantes en E. D'après la propriété de Thalès :

$$\frac{EA}{EB} = \frac{EJ'}{ES} = \frac{AJ'}{BS}$$

On obtient : $\frac{x}{80-x} = \frac{30}{60}$

Les produits en croix sont égaux, on obtient l'équation suivante : $60\times x = 30\times(80 - x)$

$$60x = 2400 - 30x$$
$$90x = 2400$$
$$x = \frac{2400}{90} = \frac{80}{3} \approx 26{,}66$$

La longueur à parcourir est égale à J'S :

$$\sqrt{80^2 + 90^2} = \sqrt{14500} \approx 120{,}41$$

d. On peut contrôler sur le dessin qu'en plaçant E sur le segment [J'S], on trouve un segment AE de 2,66 cm et que J'S mesure 12cm environ.