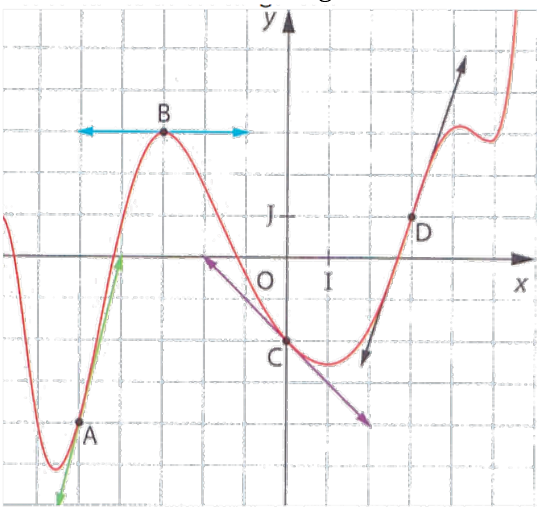
Exercice 1 :

1. Voici la représentation graphique d'une fonction f et certaines de ses tangentes.



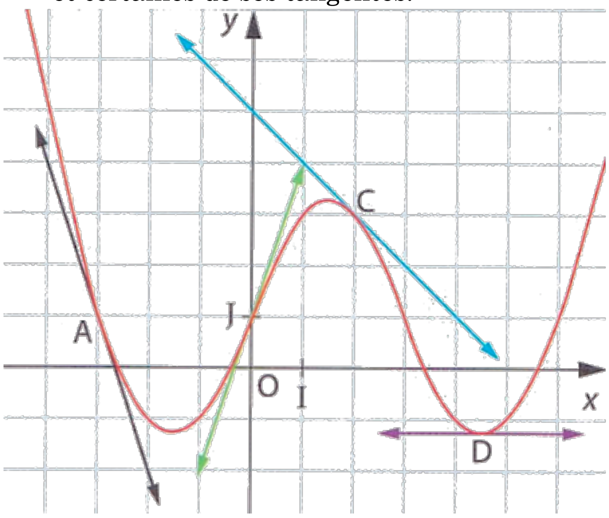
Rappel : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a.
La tangente en D passe bien sûr par D(3 ; 1) et aussi par E(4 ; 4) donc $f'(3)=\frac{y_E-y_D}{x_E-x_D}=\frac{4-1}{4-3}=3$

b) $f'(-5)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A. $f'(-5)=4$

c) $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point B. $f'(-3)=0$ car la tangente est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses)

d) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point C. $f'(0)=-1$

2. Voici la représentation graphique d'une fonction g et certaines de ses tangentes.



a) $g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_g au point J. $g'(0)=3$

b) $g'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_g au point C. $g'(2)=-1$

c) $g'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_g au point A. $g'(-3)=-3$

d) $g'(4{,}5)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_g au point D. $g'(4{,}5)=0$ car la tangete est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses)

Exercice 2 :

On donne $f(x)=x^2-2x$

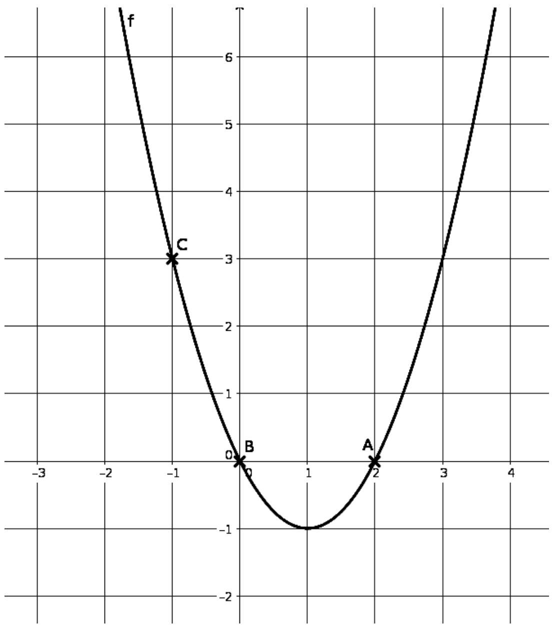
1) Commençons par le point A :

a) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2(2+h)-(2^2-2\times 2)}{h}$

$=\frac{4+4h+h^2-4-2h-0}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=\frac{h(h+2)}{h}=h+2$

b) $f'(2)$ s'obtient en faisant tendre h vers 0.
$h+2$ va alors tendre vers 2 donc $f'(2)=2$

$f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=2$



c) Pour tracer la tangente à la courbe au point A. Je trace une droite qui passe par A et de coefficient directeur 2.

2) Répondre aux mêmes questions concernant le point C.

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{(-1+h)^2-2(-1+h)-((-1)^2-2\times(-1))}{h}=\frac{1-2h+h^2+2-2h-3}{h}=\frac{h^2-4h}{h}=\frac{h(h-4)}{h}=h-4$$

$f'(-1)$ s'obtient en faisant tendre h vers 0.

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=-4$$

Pour tracer la tangente à la courbe au point C. Je trace la droite qui passe par C et de coefficient directeur -4.

2) Répondre aux mêmes questions concernant le point B.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^2-2h-0}{h}=\frac{h^2-2h}{h}=\frac{h(h-2)}{h}=h-2$$

$f'(0)$ s'obtient en faisant tendre h vers 0.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-2$$

Pour tracer la tangente à la courbe au point B. Je trace la droite qui passe par B et de coefficient directeur -2.

Exercice 3 :

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient l'affichage suivant :

1	f(x):=x^2-3x+5 → $f(x) := x^2 - 3x + 5$
2	(f(3+h)-f(3))/h → $h+3$
3	(f(-2+h)-f(-2))/h → $h-7$
4	(f(a+h)-f(a))/h → $2a+h-3$

1) $f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}h+3=3$

$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}h-7=-7$

2) Pour calculer $f'(0)$ on utilise la ligne 4 en prenant $a=0$.

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}2\times 0+h-3=-3$

Pour calculer $f'(1)$ on utilise la ligne 4 en prenant $a=1$.

$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}2\times 1+h-3=-1$

3) Que vaut $f'(a)$ pour une valeur de a quelconque ?

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}2a+h-3=2a-3$

Challenge *:*

$f(a+h)=(a+h)^2-3(a+h)+5=a^2+2ah+h^2-3a-3h+5$

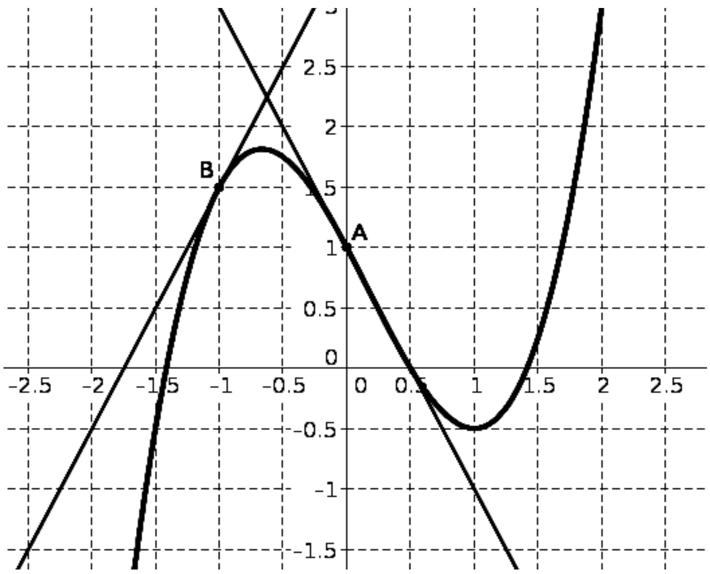
et $f(a)=a^2-3a+5$

Donc $f(a+h)-f(a)=2ah+h^2-3h$ (en soustrayant les deux lignes précédentes)

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2ah+h^2-3h}{h}=\frac{h(2a+h-3)}{h}=2a+h-3$ Challenge réussi !

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-\frac{x^2}{2}-2x+1$ représentée graphiquement ci-contre.



1) Lire graphiquement :

$f(-1)$ est l'ordonnée du point B donc $f(-1)=1{,}5$

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente en B donc $f'(-1)=2$

$f(0)$ est l'ordonnée du point A donc $f(0)=1$

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en A donc $f'(0)=-2$

2) Aux points d'abscisses -0,6 et 1 les tangentes ont pour coefficient directeur 0.

3) L'équation de la tangente en A est $y=-2x+1$ en effet m=-2 et p, l'ordonnée à l'origine est 1

4) Pour l'équation de la tangente en B, il est plus difficile de lire l'ordonnée à l'origine. On va utiliser la propriété du cours : Équation de la tangente en A d'abscisse a : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ avec ici a=-1 (abscisse de B)

$f'(-1)=2$ et $f(-1)=1{,}5$ donc la tangente en B a pour équation $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$

$y=2(x+1)+1{,}5$ $\quad y=2x+2+1{,}5$ $\quad y=2x+3{,}5$

Exercice 5 :

Un véhicule décrit un mouvement rectiligne.

La distance parcourue, en mètre, depuis le temps $t=0$ jusqu'au temps t, en secondes, est : $d(t)=t^2+5t$

1. Taux de variation de la distance entre les temps t et $t+h$.

$$\frac{d(t+h)-d(t)}{h}=\frac{(t+h)^2+5(t+h)-(t^2+5t)}{5}=\frac{t^2+2\text{th}+h^2+5t+5h-t^2-5t}{h}=\frac{2\text{th}+h^2+5h}{h}=\frac{h(2t+h+5)}{h}=2t+h+5$$

2, En déduire sa vitesse instantanée à $t=0$ et $t=10$.

Le taux de variation de la distance entre les temps 0 et 0+h est égal à $\frac{d(0+h)-d(0)}{h}=2\times0+h+5=h+5$

La vitesse instantanée s'obtient en faisant tendre h vers 0. donc $d'(0)=5$

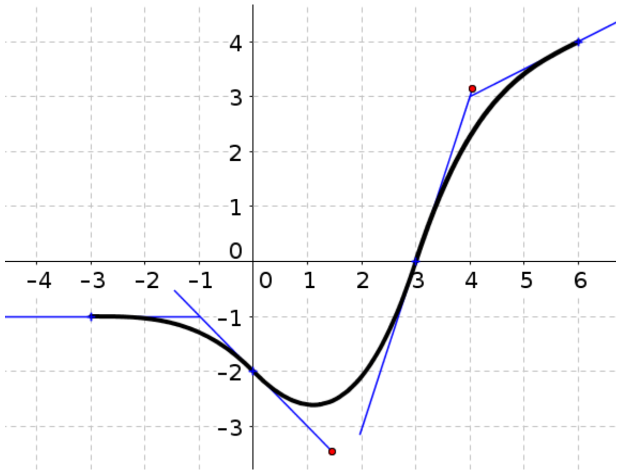
Le taux de variation de la distance entre les temps 10 et 10+h est égal à $\frac{d(10+h)-d(10)}{h}=2\times10+h+5=h+25$

La vitesse instantanée s'obtient en faisant tendre h vers 0. donc $d'(10)=25$

→ Plus généralement, la vitesse instantanée à l'instant t est donnée par $d'(t)=2t+5$

Exercice 6:

C est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur ℝ. On donne :



$f(-3)=-1$ $\qquad f'(-3)=0$

$f(0)=-2$ $\qquad f'(0)=-1$

$f(3)=0$ $\qquad f'(3)=3$

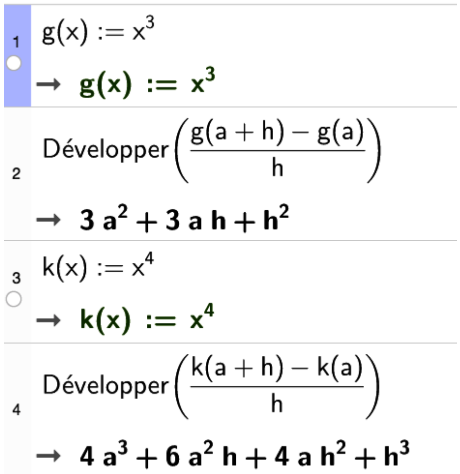
$f'(6)=0{,}5$ $\qquad f(6)=4$

Activité 2 :

1) Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2$

a) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 1^3-3\times1^2+1+1=0 = \dfrac{2ah+h^2}{h}=\dfrac{h(2a+h)}{h}=2a+h$

b) $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}2a+h=2a$



2) On définit les fonctions g et k par $g(x)=x^3$, et $k(x)=x^4$.

a) $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = 3a^2+3ah+h^3$ et en faisant tendre h vers 0,

on obtient : $g'(a) = 3a^2$

b) $\dfrac{k(a+h)-k(a)}{h} = 4a^3+6a^2h+4ah^2+h^3$ et en faisant tendre h vers 0, on obtient : $k'(a) = 4a^3$

Exercice 7 : Compléter

Fonction	Fonction dérivée	$f'(a)$
$f(x) = 4x-7$	$f'(x)=4\times1=4$	$f'(2) = 4$
$f(x) = x^2-3x+1$	$f'(x)=2x-3\times1+0=2x-3$	$f'(0)=2\times0-3=-3$
$f(x) = \dfrac{x^2}{2}-2x$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}\times2x-2\times1=x-2$	$f'(-2)=-2-2=-4$
$f(x)=4x-5+2x^3$	$f'(x)=4\times1+0+2\times3x^2=6x^2+4$	$f'(-1)=6\times(-1)^2+4=10$
$f(x) = -x^3-\dfrac{1}{2}x^2-3$	$f'(x)=-1\times(3x^2)-\dfrac{1}{2}\times2x+0=-3x^2-x$	$f'(1)=-3\times1^2-1=-4$
$f(x) = \dfrac{x^3}{10}-x-1$	$f'(x)=\dfrac{1}{10}\times3x^2-1+0=\dfrac{3}{10}x^2-1$	$f'(1)=\dfrac{3}{10}\times1^2-1 = -\dfrac{7}{10}=-0{,}7$

Exercice 8 :

1. Soit *f* la fonction définie par $f(x)=x^3-3x^2+x+1$

a) $f(1) = 1^3-3\times1^2+1+1=0$

b) $f'(x) = 3x^2-3\times2x+1+0=3x^2-6x+1$

c) L'équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 1 est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

Or $f(1)=0$ et $f'(1)=3\times1^2-6\times1+1=-2$

Donc l'équation de la tangente est $y=-2(x-1)+0=-2x+2$

2. Soit *f* la fonction définie par $f(x)=x^3-x^2+x+1$

$f(0)=0^3-0^2+x+1=1$

$f'(x)=3x^2-2x+1+0=3x^2-2x+1$ et donc $f'(0)=3\times0^2-2\times0+1=1$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 0 est $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=1(x-0)+1=x+1$

Exercice 9 * :

Soit *f* la fonction définie et dérivable sur ℝ telle que,

pour tout nombre réel *x*, $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+1$

$f'(x)=\dfrac{1}{3}\times3x^2-2x+0=x^2-2x$

$f'(3)=3^2-2\times3=3$ et $f'(-1)=(-1)^2-2\times(-1)=1+2=3$

Les tangentes à C aux points d'abscisses 3 et -1 ont le même coefficient directeur don elles sont parallèles.

Exercice 10 * :

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par

$f(x)=\dfrac{2x^3}{3}-2x^2-6x+5$

a. $f'(x)=\dfrac{2}{3}\times3x^2-2\times2x-6+0=2x^2-4x-6$

On cherche à résoudre $f'(x)=0$

$\Delta=(-4)^2-4\times2\times(-6)=16+48=64$

donc *f'* possède deux racines $x_1=\dfrac{-(-4)-\sqrt{64}}{2\times2}=-1$ et

$x_2=\dfrac{-(-4)+\sqrt{64}}{2\times2}=3$ donc *f'* s'annule en -1 et 3

b. Aux points d'abscisses -1 et 3 les tangentes à C_f sont donc parallèles à l'axe des abscisses.

Exercice 11 * :

Soit *f* la fonction définie sur [– 9 ; 15] par

$f(x)=-2x^2-4x+5$.

On note C sa courbe représentative dans un repère.

a. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$y=f'(x)(x-0)+f(0)$

$f(0)=-2\times0^2-4\times0+5=5$

$f'(x)=-2\times2x-4\times1+0=-4x-4$ donc

$f'(0)=-4\times0-4=-4$

La tangente en A(0 ; 5) a donc pour équation

$y=-4(x-0)+5=-4x+5$

b. $f(x)-(-4x+5)=-2x^2-4x+5-(-4x+5)=-2x^2$

Pour tout réel x, $f(x)-(4x-5)\geqslant0$

c. On en déduit que la courbe C est au-dessus de T.

Le seul point d'intersection est A(0 ; 5)

Exercice 12 * :

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+1$

a. La tangente au point d'abscisse *a* a pour équation

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$f(a)=\dfrac{a^2}{4}+1$

$f'(x)=\dfrac{1}{4}\times2x+0=\dfrac{x}{2}$ donc $f'(a)=\dfrac{a}{2}$

La tangente en $A(a;f(a))$ a donc pour équation

$y=\dfrac{a}{2}(x-a)+\dfrac{a^2}{4}+1$ $\quad y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{4}+1$

$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}+1$ $\quad m=\dfrac{a}{2}$ et $p=-\dfrac{a^2}{4}+1$

b. Une tangente passera par l'origine du repère si et seulement si p=0 c'est-dire $-\dfrac{a^2}{4}+1=0$ $\quad a^2=4$

donc $a=2$ ou $a=-2$.

Seules les tangentes aux points d'abscisses 2 et -2 passent par l'origine du repère.

Exercice 13 : Démonstrations

1) Soit *f* la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Soient a et h deux réels non nuls tels que $a+h\neq 0$

Le taux de variation de la fonction *f* entre a et $a+h$ est égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}=\frac{\frac{-h}{(a+h)a}}{h}=\frac{-1}{a(a+h)}.$$

$f'(a)$ s'obtient en faisant tendre h vers 0 et donc $\dfrac{-1}{a(a+h)}$ va tendre vers $-\dfrac{1}{a^2}$.

Donc $f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$ On a ainsi démontré le résultat du cours concernant la dérivée de la fonction inverse.

2) Soit *f* définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x}$. Soit a un réel positif et h un réel non nul tel que $a+h\geqslant 0$

a) Le taux de variation de la fonction *f* entre a et $a+h$ est égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{a+h}^2-\sqrt{a}^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{a+h-a}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$f'(a)$ s'obtient en faisant tendre h vers 0 et donc $\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ va tendre alors vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Donc $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ pour tout a>0. On a ainsi démontré le résultat du cours concernant la dérivée de la fonction racine carrée.

b) Pour a =0 et h>0, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$

Mais si on fait tendre h vers 0, la quantité $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ ne va pas tendre vers un nombre réel.

On peut même dire que plus h est petit et plus la quantité $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient grande.

Par conséquent, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

« A quel niveau vas-tu prendre la tangente ? »

Niveau 1 :

$f(0) = 2$ $\quad$ $f'(0) = 0$ (la tangente est horizontale au sommet de la parabole)

$f(2) = 3$ $\quad$ $f'(2) = 1$ (coefficient directeur de la tangente au point A)

Niveau 2 : Équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2.

$y=f'(-2)(x-(-2))+f(-2)$ $\qquad$ $f'(x)=\frac{2x}{4}+0=\frac{x}{2}$ $\qquad$ donc $f'(-2)=\frac{-2}{2}=-1$ $\qquad$ $f(-2)=\frac{(-2)^2}{4}+2=3$

Donc $y=-1(x+2)+3$ $\qquad$ $y=-x+1$ est l'équation de la tangente au point d'abscisse -2

Niveau 3 : Donner le taux de variation de f entre 2 et 2+h

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{(2+h)^2}{4}+2-3}{h}=\frac{\frac{4+4h+h^2}{4}-1}{h}=\frac{1+h+\frac{h^2}{4}-1}{h}=\frac{h+\frac{h^2}{4}}{h}=\frac{h\,\frac{1+h}{4}}{h}=1+\frac{h}{4}$$

Niveau 4 : En quel point de la courbe, la tangente a-t-elle pour coefficient directeur -2 ?

Cela revient à trouver le point pour lequel on a $f'(x)=-2$ $\quad$ c'est-à-dire $\frac{x}{2}=-2$ $\qquad$ $x=-4$

L'équation de la tangente en $x=-4$ est $y=f'(-4)(x+4)+f(-4)$ $\qquad$ $y=-4(x+4)+6$ $\qquad$ $y=-4x-10$

Niveau 5 : La droite d'équation $y=-\frac{3}{2}x$ est-elle tangente à la parabole ?

En quel point a-t-on $f'(x)=\frac{-3}{2}$? $\quad$ Cela revient à trouver le point pour lequel on a $\frac{x}{2}=\frac{-3}{2}$ $\qquad$ $x=-3$

L'équation de la tangente en $x=-3$ est $y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$ $\qquad$ $y=\frac{-3}{2}(x+3)+\frac{17}{4}$ $\qquad$ $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

et ce n'est donc pas $y=-\frac{3}{2}x$

Niveau 6 :

Soit M un point de la parabole d'abscisse $a\neq 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe en M sous la forme $y=mx+p$ avec m et p exprimés en fonction de a.

En un point M d'abscisse a l'équation de la tangente à la parabole est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

c'est-à-dire : $y=\frac{a}{2}(x-a)+\frac{a^2}{4}+2$ $\qquad$ ou encore $y=\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}+2$ $\qquad$ $y=\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}+2$ $\quad$ donc $m=\frac{a}{2}$ et $p=-\frac{a^2}{4}+2$

Niveau 7 : Existe-t-il des tangentes à la parabole qui passe par l'origine du repère ?

En un point M d'abscisse a l'équation de la tangente à la parabole est $y=\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}+2$

L'ordonnée à l'origine de cette tangente est $-\frac{a^2}{4}+2$. On cherche donc une valeur de a telle que $-\frac{a^2}{4}+2=0$; $a^2=8$

donc $\quad a=\sqrt{8}$ ou $a=-\sqrt{8}$

Donc aux points d'abscisses $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$, les tangentes à la parabole passent par l'origine du repère.

Niveau 8 :
Soit M un point de la parabole d'abscisse $a \neq 0$. La tangente à la courbe en M coupe la droite d'équation $y=2$ en P.

a) En un point M d'abscisse a l'équation de la tangente à la parabole est $y=\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}+2$

Cette tangente coupe la droite d'équation y=2 en P donc $y_P=2$ et $y_P=\frac{a}{2}x_P-\frac{a^2}{4}+2$

donc $2=\frac{a}{2}x_P-\frac{a^2}{4}+2$ c'est-à-dire $\frac{a}{2}x_P-\frac{a^2}{4}=0$ donc $x_P=\frac{a}{2}$ don $P\left(\frac{a}{2};2\right)$

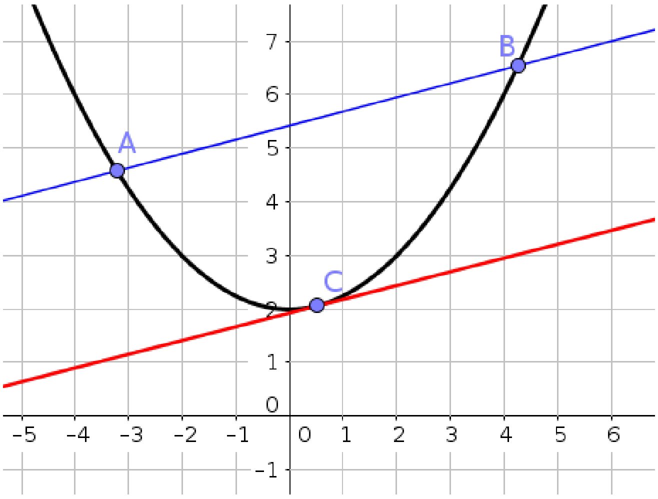
b) On trace la parallèle (d) à l'axe des abscisse passant par S(0 ; 2) (droite d'équation y=2).
On trace la perpendiculaire à (d) passant par M qui coupe (d) en H. On place le milieu K de [SH} en traçant au compas la médiatrice de [SH]. La droite (KM) est alors la tangente à la parabole en M.

Niveau 9 :
A et B sont deux points de la parabole d'abscisses respectives a et b (deux réels distincts)
La parabole possède-t-elle une tangente parallèle à la droite (AB). Si oui, en quel point ?

La droite (AB) a pour coefficient directeur $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{b^2}{4}+2-\left(\frac{a^2}{4}+2\right)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{4(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{4(b-a)}=\frac{a+b}{4}$

On cherche donc un réel x tel que $f'(x)=\frac{a+b}{4}$ c'est-à-dire $\frac{x}{2}=\frac{a+b}{4}$ donc $x=\frac{a+b}{2}$

Au point C d'abscisse $\frac{a+b}{2}$, la tangente à (C_f) est donc parallèle à la droite (AB).



Niveau 10 :
Soit A un point de la parabole d'abscisse $a \neq 0$
Trouver le point B correspondant de la parabole pour lequel les tangentes (T_A) et (T_B) sont perpendiculaires.

La tangente à (C_f) en A d'abscisse a a pour coefficient directeur $\frac{a}{2}$.

La tangente à (C_f) perpendiculaire à cette tangente a donc pour coefficient directeur $\frac{-2}{a}$ car $-\frac{2}{a}\times 2a=-1$

On cherche donc un réel x tel que $f'(x)=-\frac{2}{a}$ c'est-à-dire $\frac{x}{2}=-\frac{2}{a}$ donc $x=-\frac{4}{a}$

La tangente à (C_f) en B d'abscisse $-\frac{4}{a}$ est donc perpendiculaire à la tangente à (C_f) en A d'abscisse a.