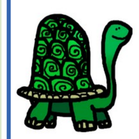
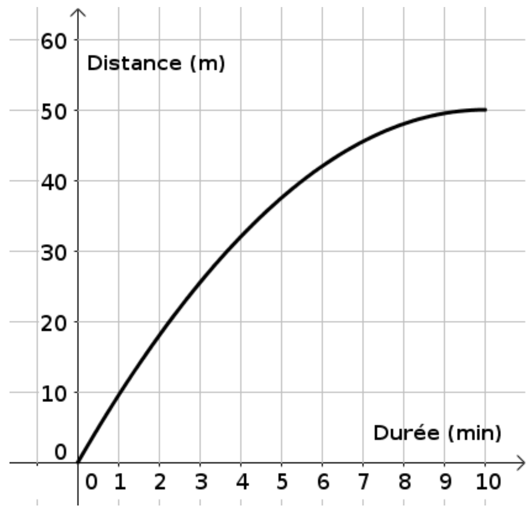
Notion de nombre dérivé

Exemple :

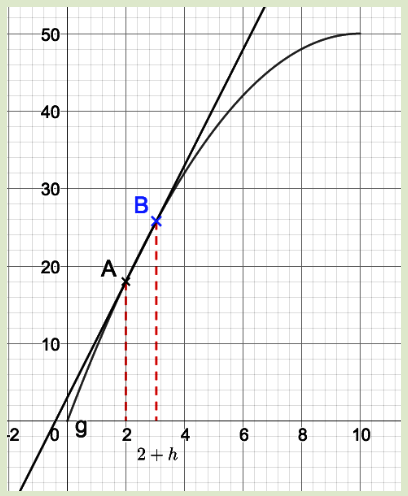


Pour préparer une course de vitesse, la tortue Pétunia s'entraîne, munie d'un capteur GPS qui permet de mesurer la distance parcourue en fonction du temps. Au dernier entraînement, elle a pu observer que la distance parcourue, exprimée en mètres, à un instant t, en minutes, peut être modélisée par la fonction f avec : $f(t) = -0{,}5\,t^2 + 10\,t$.

La fonction f est représentée ci-dessous.

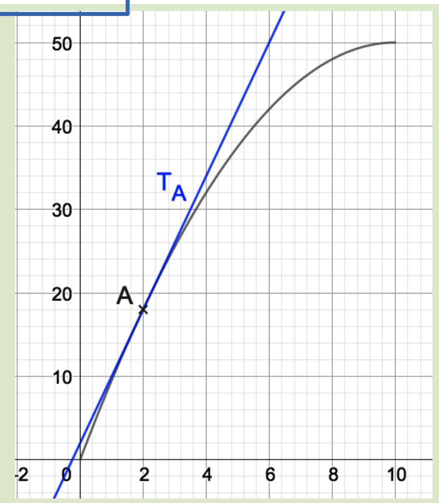


La droite (AB) avec A d'abscisse a et B d'abscisse $a+h$



La droite (AB) est sécante en A(2 ; f (2)) à la courbe avec B(2+h ; f(2+h))

Lorsque h tend vers 0



La tangente (T_A) à la courbe C_f au point A d'abscisse a

Définition : Lorsque h tend vers 0, le point B d'abscisse $a+h$ se rapproche du point A d'abscisse a. La droite (AB) va se « stabiliser » sur une droite (T_A) qu'on appelle **tangente à C_f au point A.**

→ **Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A d'abscisse a est $f'(a)$.**

Définition : Le **taux de variation** d'une fonction f entre a et $a+h$ est le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Taux de variation : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Au point A d'abscisse $a = 2$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \ldots.$$

$f(2+h) =$

$f(2) =$

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \ldots.$

Le taux de variation entre 2 et 2+h est donc :

Lorsque h tend vers 0

lorsque h tend vers 0 le taux de variation se rapproche de la valeur….

On note lim …..

Cette valeur s'appelle le nombre dérivé de f en 2 et se note $f'(2)$

Nombre dérivé de f en a
$f'(a)$

Définition : Si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0, on dit que f est **dérivable en a** et le nombre vers lequel tend ce taux d'accroissement est appelé **nombre dérivé de f en a**. On le note **$f'(a)$**.

Interprétation physique du nombre dérivé :
- pente locale
- vitesse instantanée si la fonction représente la distance parcourue en fonction du temps

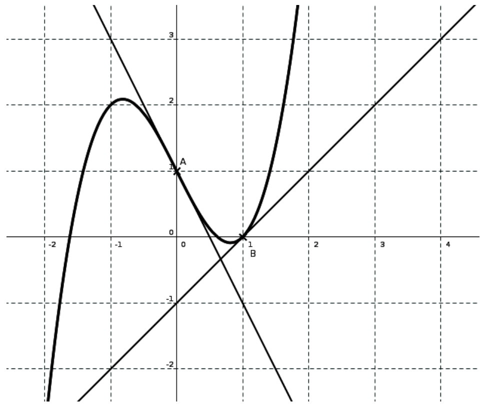
Propriété : Si f est dérivable en a et de nombre dérivé $f'(a)$ alors $\boldsymbol{f'(a)}$ **est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a.**

L'équation réduite de cette tangente est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Note : à la calculatrice : On saisit l'expression de $f(x)$.
On trace la représentation graphique après réglage de la fenêtre.
- TI : menu « **Dessin** », sélectionner « **Tangent** » ...
- Numworks : sur la fenêtre du graphique : « ok », puis « tangente »...

La tangente au point d'abscisse choisi est alors tracée et son équation apparaît.

Exemple 1 : **par lecture graphique**
a) Trouver l'équation de la tangente au point A d'abscisse 0.



b) Trouver l'équation de la tangente au point B d'abscisse 1.

Exemple 2 **: par calcul et avec l'aide momentanée de la calculatrice...**
Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-3x+1$

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer $f'(2)$.

b. Donner l'équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse 2.

Notion de fonction dérivée

Définition :
➔ Soit f une fonction qui admet un nombre dérivé en tout point d'un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** sur I.
➔ On appelle **fonction dérivée de f, que l'on note f',** la fonction qui à tout nombre réel x de I associe le nombre dérivé $\boldsymbol{f'(x)}$.

Exemple : Soit f la fonction carrée : $f(x)=x^2$

On réussit à calculer $f'(a)$ pour toute valeur de a à partir du taux de variation :

Dérivée des fonctions polynômes

$f(x)=k$ k nombre quelconque	
$f(x)=x$	
$f(x)=x^2$	
$f(x)=x^3$	
$f(x)=x^n$ n entier naturel	
$f(x)=\frac{1}{x}$ sur]- ∞ ; 0[et]0 ; + ∞[	
$f(x)=\sqrt{x}$ avec $x>0$	

Premières opérations sur les fonctions dérivées

Propriété : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

➔ la fonction $u+v$ définie par $(u+v)(x)=u(x)+v(x)$ est dérivable et $\boldsymbol{(u+v)'=u'+v'}$

➔ Si λ est un réel quelconque, la fonction λu définie par $(\lambda u)(x)=\lambda\times u(x)$ est dérivable et $\boldsymbol{(\lambda u)'=\lambda u'}$

Exemples :

$f(x)=x^3+x^2$	$f(x)=3x-2$	$f(x)=3x^2$	$f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3$