



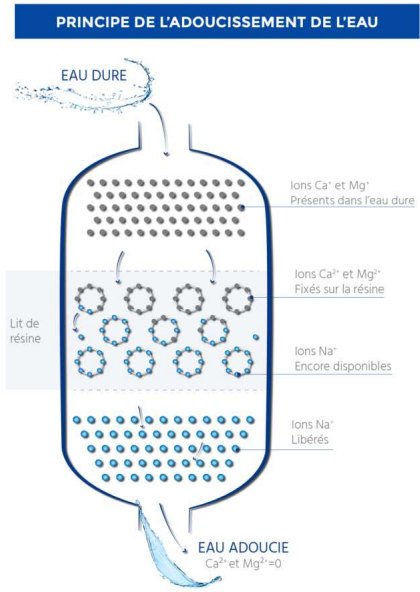
Les ions calcium et magnésium présent dans de l'eau *dure* sont peu solubles et réagissent avec les carbonates de l'eau pour former du calcaire. L'adoucissement de l'eau consiste à échanger ces ions calcium et magnésium contre des ions sodium qui sont parfaitement solubles dans l'eau. On parle d'**échange ionique**.

**Vidéo 1**

Voir la vidéo ci-contre qui présente le principe de fonctionnement d'une résine échangeuse d'ions.

<https://youtu.be/fBKpZpe1rf8>





Afin d'étudier la performance d'une résine échangeuse d'ions l'expérience a consisté à faire passer de l'eau dure (chargée en ions calcium  $Ca^{++}$ ) dans un tube qui contient une telle résine (billes poreuses de 1 mm environ). On précise que la concentration en ions calcium de l'eau dure utilisée ici est de  $5,1\text{ mmol.L}^{-1}$ . On a relevé la concentration en ions calcium  $Ca^{++}$  en sortie de résine toutes les 5 minutes pendant 1h30. Les données sont présentées dans le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Temps (en minutes)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
2	Concentration en $Ca^{++}$ (en mmol.L <sup>-1</sup> )	0,16	0,16	0,16	0,32	0,48	0,68	1,2	2,6	4,2	4,4	4,52	4,6	4,68	4,8	4,9	5	5	5

1 Étude des données à l'aide d'un tableur.

1. On a ajouté ci-dessous une ligne *Taux d'évolution en pourcentage* à la feuille de calcul précédente. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 afin de compléter cette ligne par une recopie vers la droite ?
- 

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Temps (en minutes)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
2	Concentration en $Ca^{++}$ (en mmol.L <sup>-1</sup> )	0,16	0,16	0,16	0,32	0,48	0,68	1,2	2,6	4,2	4,4	4,52	4,6	4,68	4,8	4,9	5	5	5
3	Taux d'évolution en %																		

2. Compléter la ligne *Taux d'évolution en pourcentage*, on arrondira les pourcentage à l'unité.
3. Compte tenu de vos observations, peut-on envisager un modèle d'ajustement linéaire ou exponentiel ?
-

## 2 Recherche d'un modèle adapté avec Geogebra.

Nous avons vu précédemment que les modèles linéaires ou exponentiels ne sont pas adaptés à cette situation. L'objectif de cette partie est de déterminer un modèle pertinent ; nous allons pour cela utiliser le logiciel *Geogebra*.

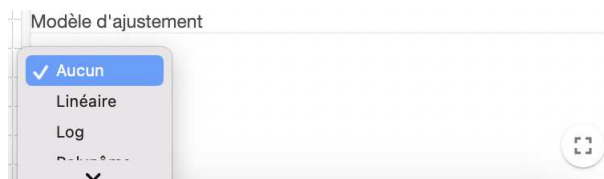
1. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous avec *Geogebra*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Temps (en minutes)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
2	Concentration en $\text{Ca}^{++}$ (en mmol.L-1)	0.16	0.16	0.16	0.32	0.48	0.68	1.2	2.6	4.2	4.4	4.52	4.6	4.68	4.8	4.9	5	5	5

2. La feuille de calcul *Geogebra* va nous permettre d'analyser les données précédentes. Pour cela sélectionner les données (cellules B1 à S2 du tableur) puis utiliser le menu *Statistiques à deux variables* comme l'indique la capture d'écran ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Temps (en minutes)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
2	Concentration en $\text{Ca}^{++}$ (en mmol.L-1)	0.16	0.16	0.16	0.32	0.48	0.68	1.2	2.6	4.2	4.4	4.52	4.6	4.68	4.8	4.9	5	5	5
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			

3. Le nuage de point s'est affiché dans une fenêtre à droite. Utiliser le menu déroulant *Modèle d'ajustement* comme l'indique la capture d'écran ci-dessous afin de choisir le modèle d'ajustement qui semble le plus adapté à notre situation.



4. Préciser le nom du modèle et donner l'expression de la fonction qui semble modéliser au mieux notre situation.

.....

.....

.....

.....

5. En observant la courbe, émettre une conjecture concernant le sens de variation de cette fonction. On pourra présenter cette conjecture dans un tableau.

.....

.....

.....

.....

6. En observant la courbe, émettre une conjecture concernant la convexité de cette fonction. On pourra présenter cette conjecture dans un tableau.

.....

.....

.....

.....

### 3 Recherche d'un modèle adapté à l'aide d'une équation différentielle

Nous allons dans cette partie résoudre une équation différentielle afin de retrouver la fonction logistique  $f$  proposée par le logiciel et démontrer les deux conjectures précédentes.



#### Culture mathématique

Le modèle logistique est un modèle à *restriction de croissance*, il a été proposé en 1895 par Pierre François VERHULST comme une alternative au modèle exponentielle à *croissance infini et sans contrainte*.

Une fonction logistique est solution d'une équation différentielle de la forme  $A' = r \left(1 - \frac{A}{K}\right) A$  où  $r$  et  $K$  sont deux constantes.

On peut justifier que :

- Si  $A$  est petit alors  $A' \simeq r A$  ;
- la limite en  $+\infty$  de  $A$  est  $K$  ;
- si  $A$  augmente alors le taux d'accroissement diminue.

Dans toute cette partie on admet que  $f$  est définie sur  $[0; +\infty[$ , strictement positive et solution de l'équation différentielle (E) suivante où  $r = 0,2195$  et  $K = 4,8569$ :

$$A' = r \left(1 - \frac{A}{K}\right) A \quad (E)$$

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ . En utilisant que  $f$  est solution de (E) démontrer que  $g$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$y' = -r y + \frac{r}{K} \quad (E')$$

2. Résoudre l'équation (E') et en déduire que  $f(x) = \frac{K}{C K e^{-r x} + 1}$  où  $C$  est une constante réelle.

### 4 Étude théorique du modèle

Dans toute la suite on choisit  $C$  tel que  $C K = 5186,624$  afin que  $f$  soit la fonction proposée par le logiciel *Geogebra* de la partie précédente.

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter votre réponse dans le cadre du problème.

.....  
 .....  
 .....  
 .....

2. Étude des variations de  $f$ .

- (a) Démontrer que pour tout  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$  on a :  $0 < f(x) < 4,8569$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

- (b) Utiliser l'équation différentielle (E) et la question précédente pour déterminer les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. Étude de la convexité de $f$ .

- (a) Utiliser l'équation différentielle (E) pour démontrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle (E'') suivante :

$$A'' = r A' \left( 1 - \frac{2A}{K} \right) \quad (E'')$$

.....

.....

.....

.....

.....

- (b) En déduire le signe de  $f''$  et la convexité de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

.....

.....

.....

.....

.....

### 4. On considère l'algorithme ci-dessous programmé sous Python.

```
from math import *

def f2(x):
    return 1213.704539*exp(-0.2195*x)*(5186.624*exp(-0.2195*x)-1)/(5186.624*exp(-0.2195*x)+1)**3

x=...
while ...:
    x=...
print(x)
```

- (a) Reproduire cet algorithme avec un logiciel adapté et compléter les pointillés afin que celui-ci détermine un arrondi à l'unité par excès de l'abscisse du point d'inflexion de  $f$ .
- (b) Quelle est la valeur de  $x$  à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter votre réponse dans le cadre du problème.

.....

.....

.....