

➤ Loi de refroidissement de Newton

Définition : La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : « La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. »

On pose $\theta(t)$ la température du corps en fonction du temps écoulé en minutes. On appelle a le coefficient de proportionnalité liant la vitesse de refroidissement à la différence de température.

On suppose que la température de l'air ambiant est θ_0 .

1. Ecrire l'équation différentielle que doit vérifier θ en fonction de a et θ_0 . (Faire vérifier par le professeur)

L'équation différentielle est $\theta' = a(\theta - \theta_0)$

2.a. On donne $\theta_0 = 25^\circ\text{C}$. Montrer que la fonction $v(t) = 25$ est une solution particulière de (E).

Montrer que v est une solution (particulière) de (E), revient à vérifier que $v' = a(v - \theta_0)$ soit $v' = a(v - 25)$

On a d'une part $v' = 0$ et d'autre part $a(v - 25) = a(25 - 25) = 0$.

Donc v est bien une solution de (E)

b. Montrer que la fonction $u(t) = Ce^{at}$, où C est un nombre réel, est une solution de l'équation (E₀) : $y' = ay$ appelée équation homogène associée à (E).

$u(t) = Ce^{at}$ et $u'(t) = Ca e^{at}$ on a $u'(t) = a \times Ce^{at}$ soit $u'(t) = a \times u(t)$.

u est bien solution de l'équation homogène $y' = ay$.

c. Montrer que la fonction $f(t) = v(t) + u(t)$ est une solution de l'équation différentielle (E).

On notera qu'il y a alors une infinité de solutions, en changeant la valeur de C .

$f(t) = v(t) + u(t)$ soit $f(t) = 25 + Ce^{at}$.

On a $f'(t) = Ca e^{at}$ et $a(f - \theta_0) = a(25 + Ce^{at} - 25)$ soit $a(f - \theta_0) = Ca e^{at}$

Autrement dit, on a $f' = a(f - \theta_0)$. f est donc bien solution de l'équation différentielle (E).

d. On sait que la température du corps est de 100°C , à l'instant initial.

Déterminer LA solution de l'équation différentielle avec cette condition initiale.

La température du corps est de 100°C , à l'instant initial, autrement dit, $f(0) (= \theta(0)) = 100$.

$f(0) (= \theta(0)) = 100 \Leftrightarrow 25 + C = 100 \Leftrightarrow C = 75$

LA solution de l'équation différentielle (E) est donc $f(t) = 25 + 75e^{at}$

3. Le corps atteint la température de 70°C , au bout de 15 minutes. Déterminer le coefficient a à 10^{-3} près.

L'information se traduit par :

$$f(15) = 70 \Leftrightarrow 25 + 75e^{15a} = 70$$

$$\Leftrightarrow e^{15a} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 15a = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$f(15) = 70 \Leftrightarrow a = \frac{1}{15} \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

Ainsi $a \approx -0,034$ à 10^{-3} près.

$$\text{On a alors } f(t) = 25 + 75e^{-0,034t}$$

4. a. Au bout de combien de temps la température du corps sera-t-elle de 40°C ?

En donner une valeur arrondie à la seconde près.

On cherche à déterminer ici t tel que $f(t) = 40$.

$$f(t) = 40 \Leftrightarrow 25 + 75e^{-0,034t} = 40$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,034t} = 0,2$$

$$\Leftrightarrow -0,034t = \ln 0,2$$

$$f(t) = 40 \Leftrightarrow t = -\ln \frac{0,2}{0,034}$$

Ainsi $t \approx 47,34'$ soit $t \approx 47,20'$.

Après 47 minutes et 20 secondes la température du corps est de 40°C .

b. Écrire un algorithme en Python qui permet de trouver à la minute près au bout de combien de temps le corps ne refroidit plus (température à moins de 1°C de la température de l'air ambiant) ?

On peut proposer l'algorithme suivant :

On obtient : $t = 127$

Au bout 1 h 07 le corps ne refroidit plus.

```
from math import *
T=100
t = 0
while abs(T-25) >=26:
    t = t+1
    T = 75 * exp(-0.034 * t) + 25
print ( t )
```

➤ Mécanique

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = -10e^{-0,3t} + 12$.

Construire le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$

Dérivons f : $f'(t) = 3e^{-0,3t}$.

Etudions le signe de $f'(t)$: pour tout t de $[0 ; +\infty[$, on a $3 > 0$ et $e^{-0,3t} > 0$, par conséquent, par produit, $f'(t) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Déterminons la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,3t = -\infty$, or $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,3t} = 0$, d'où $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 12$.

On obtient le tableau de variations suivant :

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| t | 0 | $+\infty$ |
| Signe de $f'(t)$ | + | |
| Variations de f | 2 | 12 |

Partie B :

Une société utilise, dans le cadre de son activité de nettoyage de vitres, une nacelle élévatrice à mât télescopique vertical. On souhaite étudier la durée nécessaire pour que la nacelle atteigne sa hauteur opérationnelle.

On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, de la nacelle à l'instant t , en seconde.

On suppose que f est une fonction de la variable t définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

Il s'avère que la hauteur f de la nacelle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$y' = -0,3y + 3,6.$$

1.a. Montrer que la fonction $v(t) = 12$ est une *solution particulière* de (E).

Montrer que v est une solution (particulière) de (E), revient à vérifier que $v' = -0,3v + 3,6$

On a d'une part $v' = 0$ et d'autre part $-0,3 \times 12 + 3,6 = 0$.

Donc v est bien une solution de (E)

b. Montrer que la fonction $u(t) = Ce^{-0,3t}$, où C est un nombre réel, est une solution de

l'équation (E₀) : $y' = -0,3y$ appelée *équation homogène* associée à (E).

$$u(t) = Ce^{-0,3t} \text{ et } u'(t) = -0,3Ce^{-0,3t} \text{ soit } u'(t) = -0,3 \times u(t).$$

u est bien solution de l'équation homogène $y' = -0,3y$.

c. Montrer que la fonction $f(t) = v(t) + u(t)$ est une solution de l'équation différentielle (E).

On notera qu'il y a alors une infinité de solutions, en changeant la valeur de C .

On a $f(t) = 12 + Ce^{-0,3t}$, $-0,3f(t) + 3,6 = -0,3(12 + Ce^{-0,3t}) + 3,6 = -0,3Ce^{-0,3t}$ et $f'(t) = -0,3Ce^{-0,3t}$.

Ainsi $f'(t) = -0,3f(t) + 3,6$ ce qui signifie que f est bien solution de l'équation différentielle $y' = -0,3y + 3,6$.

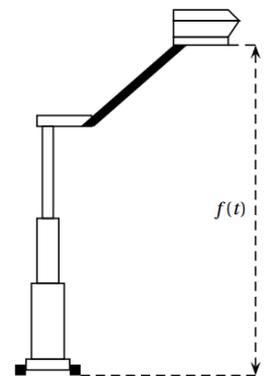
d. A l'instant $t = 0$, la nacelle est à 2 mètres de hauteur.

Déterminer LA solution de l'équation différentielle avec cette condition initiale.

On a donc $f(0) = 2$ soit $12 + Ce^{-0,3 \times 0} = 2$ soit $12 + C = 2$ ou $C = -10$.

LA solution de (E) est donc $f(t) = -10e^{-0,3t} + 12$

Autrement dit, la fonction étudiée dans la partie A



Partie C : En utilisant les informations obtenues aux parties A et B, répondre aux questions suivantes.

1. Quelle est la vitesse initiale de la nacelle ?

La vitesse est modélisée par $f'(t) = 3e^{-0,3t}$, et on demande ici $f'(0) = 3$.

La vitesse initiale de la nacelle est donc de 3 m.s^{-1} .

2. Une structure métallique, à 12,2 mètre du sol, dépasse de la façade de l'immeuble dont les vitres doivent être nettoyées. Existe-t-il un risque que la nacelle la heurte ?

La limite de la fonction f étant de $12 < 12,2$, il n'y a rien à craindre.

Théorème :

Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I .

Les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme $x \rightarrow u(x) + v(x)$, où

- $u(x)$ une solution de l'équation différentielle (E₀) $y' = ay$, appelée équation homogène associée, avec $u(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$ et est donné par les conditions initiales.
- $v(x)$ une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + f$.

➤ Economie**Partie A :****Croissance, demande, les enjeux...**

En macro-économie, les équations linéaires d'ordre 1 (et aussi 2) permettent de décrire le principe de l'accélérateur et du multiplicateur dynamiques continus. Ces modèles économiques traitent et lient l'investissement et la consommation. En économie, l'effet multiplicateur décrit pour un système donné, la constatation qu'une variation initiale d'un élément à l'entrée (du système) provoque par le biais d'entraînements successifs, une variation finale en sortie du système plus importante d'un ou plusieurs autres éléments ; à titre d'exemple, la variation d'un montant d'une dépense peut avoir un effet multiplicateur sur le revenu national ou l'activité économique en général. L'effet d'accélérateur reposera quant à lui sur l'effet d'entraînement réciproque entre la croissance de la demande et celle de l'investissement productif. Les deux effets cumulés permettent d'analyser le cycle économique plus globalement.

Partie B :**Une situation simplifiée**

Considérons le modèle d'un marché d'un lieu d'échange imaginaire qui est décrit par une loi d'offre Q_o et de demande Q_d dynamique suivante : $Q_o = 5 + 2P(t) + \frac{1}{3}P'(t)$ et $Q_d = 10 - \frac{2}{3}P(t) - \frac{5}{3}P'(t)$, avec $P(t)$ la fonction prix.

1. Montrer que le prix d'équilibre (atteint quand $Q_o = Q_d$) $P_{eq}(t)$ est solution d'une équation différentielle : $y' = ay + b$, avec a et b constantes que l'on déterminera.

| | |
|---|---|
| $Q_o = Q_d \Leftrightarrow 5 + 2P(t) + \frac{1}{3}P'(t) = 10 - \frac{2}{3}P(t) - \frac{5}{3}P'(t)$ $\Leftrightarrow 2P'(t) = 5 - \frac{8}{3}P(t)$ | $Q_o = Q_d \Leftrightarrow P'(t) = \frac{5}{2} - \frac{4}{3}P(t)$ <p>P est donc solution de l'équation différentielle :</p> $y' = -\frac{4}{3}y + \frac{5}{2}, a = -\frac{4}{3} \text{ et } b = \frac{5}{2}$ |
|---|---|

2.a Montrer que la fonction $v(t) = \frac{15}{8}$ est une solution particulière de (E). On admet pour la suite que $P_{eq}(0) = 0$

Montrer que v est une solution (particulière) de (E), revient à vérifier que $v' = -\frac{4}{3}v + \frac{5}{2}$

On a d'une part $v' = 0$ et d'autre part $-\frac{4}{3} \times \frac{15}{8} + \frac{5}{2} = 0$. Donc v est bien une solution de (E)

b. Déterminer les solutions de l'équation homogène (E₀) : $y' = ay$.

D'après le théorème donné, les solutions de l'équation homogène $y' = -\frac{4}{3}y$, sont les fonctions $u(t) = Ce^{-\frac{4}{3}t}$, $C \in \mathbb{R}$.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Les solutions de (E) sont donc (d'après le théorème) : $P_{eq}(t) = \frac{15}{8} + Ce^{-\frac{4}{3}t}$

d. Donner LA solution de l'équation (E).

On a $P(0) = 0$, ainsi $\frac{15}{8} + Ce^{-\frac{4}{3} \times 0} = 0$ soit $C = -\frac{15}{8}$.

Par conséquent, LA solution de (E) est $P(t) = \frac{15}{8} - \frac{15}{8}e^{-\frac{4}{3}t}$

3.a. Déterminer le moment où le prix d'équilibre est égal à 1,5.

On cherche ici t tel que $P(t) = 1,5 \Leftrightarrow \frac{15}{8} - \frac{15}{8}e^{-\frac{4}{3}t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{15}{8}e^{-\frac{4}{3}t} = -\frac{3}{8} \Leftrightarrow e^{-\frac{4}{3}t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}t} = 5$

$P(t) = 1,5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}t = \ln(5)$. Le prix d'équilibre sera égal à 1,5 pour $t = 2,15$.

b. Avec le temps, quel est le prix d'équilibre dans ce modèle de marché ?

On cherche ici la limite P_{eq} quand t tend vers $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{4}{3} = -\infty$, or $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{4}{3}t} = 0$, d'où $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_{eq}(t) = \frac{15}{8}$. Le prix d'équilibre, avec le temps sera $\frac{15}{8}$.