

Problème 1

En 2010, un village U comptait 800 habitants mais chaque année il perd 5 habitants au profit d’un village V qui comptait 580 habitants en 2010.

Question : En quelle année, la population du village V dépassera-telle celle du village U ?

Modélisation du problème avec des suites	Définition : Une suite (u_n) est dite s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n on a Le nombre r est appelé de la suite (u_n) Schéma général :																												
Procédure 1 : utilisation des formes explicites des deux suites	Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et m : (forme explicite) et																												
Procédure 2 : utilisation des représentations graphiques des deux suites	Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r . Dans repère, les points de coordonnées $(n;u_n)$ sont alignés.																												
Procédure 3 : utilisation d'un algorithme	Procédure 4 : utilisation du tableur <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>1</td><td>n</td><td>U</td><td>V</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>800</td><td>580</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	1	n	U	V	2	0	800	580	3	1			4	2			5	3			6	4		
	A	B	C																										
1	n	U	V																										
2	0	800	580																										
3	1																												
4	2																												
5	3																												
6	4																												

Problème 2

Mathieu a placé 4000 € sur un compte qui rapporte 2 % d’intérêts chaque année. Julie a placé 3500 € sur un compte qui rapporte 3 % d’intérêts chaque année.

Question : Au bout de combien d’années, Julie disposera-telle de plus d’argent que Mathieu ?

Modélisation du problème avec des suites	<div>Définition :</div> <div>Une suite (u_n) est dite s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n on a</div> <div>Le nombre q est appelé de la suite (u_n) .</div> <div>Schéma général :</div>																												
Procédure 1 : utilisation des formes explicites des deux suites	<div>Propriété :</div> <div>Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors pour tous entiers naturels n et m</div> <div>.....(forme explicite) et</div> <div>.....</div>																												
Procédure 2 : utilisation d'un algorithme	<div>Procédure 3 : utilisation du tableur</div> <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>1</td><td>n</td><td>U</td><td>V</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>4000</td><td>3500</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	1	n	U	V	2	0	4000	3500	3	1			4	2			5	3			6	4		
	A	B	C																										
1	n	U	V																										
2	0	4000	3500																										
3	1																												
4	2																												
5	3																												
6	4																												

Les exemples

Les Propriétés

Exemple 1 : 1. Calculer $1 + 2 + 3 + \dots + 75$.

2. Calculer $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^9$

Exemple 2 :

Pierre a deux propositions pour son salaire lors de son arrivée dans une entreprise le 01/01/2020:

Proposition 1: Il commence avec un salaire de 2000 euros mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 115 euros.

Proposition 2: Il commence avec un salaire de 2000 euros mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 5%.

Afin de faire de se constituer un pécule pour faire le tour du monde en 2030, Pierre souhaite mettre de côté, *un* salaire mensuel par an jusqu'à son départ.

Quelle proposition lui conseillez-vous de choisir ?

Somme de termes consécutifs
d'une suite arithmétique
et
d'une suite géométrique

Propriété : Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

Démonstration :

Propriété : Pour tout réel $q \neq 1$, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

Démonstration :

Cas général : somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par

Cas général : somme des termes consécutifs d'une suite géométrique
La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par

Problème 1
En 2010, un village U comptait 800 habitants mais chaque année il perd 5 habitants au profit d’un village V qui comptait 580 habitants en 2010.

Question : En quelle année, la population du village V dépassera-telle celle du village U ?

<p>Modélisation du problème avec des suites</p> <p>Soit u_n le nombre d’habitants en 2010+n dans le village U</p> <p>On a $u_0=800$ et la formule de récurrence $u_{n+1}=u_n-5$ (u_n) est une suite arithmétique de raison -5</p> <p>Soit v_n le nombre d’habitants en 2010+n dans le village V</p> <p>On a $v_0=580$ et la formule de récurrence $v_{n+1}=v_n+5$ (v_n) est une suite arithmétique de raison 5</p>	<p>Définition :</p> <p>Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n on a $u_{n+1}=u_n+r$</p> <p>Le nombre r est appelé raison de la suite (u_n)</p> <p>Schéma général :</p>																												
<p>Procédure 1 : utilisation des formes explicites des deux suites</p> <p>Pour tout entier n, on a $u_n=800-5n$ et $v_n=580+5n$</p> <p>On cherche le plus petit entier n, tel que $v_n>u_n$</p> <p>Résolution dans \mathbb{N} de l’inéquation $580+5n>800-5n$ n>22</p> <p>Le plus petit entier strictement supérieur à 22 est 23</p> <p>Donc, la population du village V dépassera celle du village U en 2010+23=2033</p>	<p>Propriété :</p> <p>Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et m : $u_n=u_0+nr$ (forme explicite) et $u_n=u_m+(n-m)r$</p>																												
<p>Procédure 2 : utilisation des représentations graphiques des deux suites</p> <p>Pour tout entier n, on a $u_n=800-5n$ et $v_n=580+5n$</p> <p>$u_n=f(n)$ avec $f(x)=800-5x$ f est représentée graphiquement par une droite</p> <p>$v_n=g(n)$ avec $g(x)=580+5x$ g est représentée graphiquement par une droite</p> <p>On peut tracer les deux représentations graphiques et lire la première valeur entière n telle que $g(n)>f(n)$.</p>	<p>Propriété :</p> <p>Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r .</p> <p>Dans repère, les points de coordonnées $(n;u_n)$ sont alignés.</p>																												
<p>Procédure 3 : utilisation d’un algorithme</p> <p>U ← 800</p> <p>V ← 580</p> <p>N ← 0</p> <p>Tant que U≥V :</p> <p> U ← U – 5</p> <p> V ← V+5</p> <p> N ← N+1</p> <p>Fin</p> <p>Afficher N</p>	<p>Procédure 4 : utilisation du tableur</p> <table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr><tr><td>1</td><td>n</td><td>U</td><td>V</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>800</td><td>580</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table> <p>Cellule B3 : =B2-5 Cellule C3 : =C2+5</p>		A	B	C	1	n	U	V	2	0	800	580	3	1			4	2			5	3			6	4		
	A	B	C																										
1	n	U	V																										
2	0	800	580																										
3	1																												
4	2																												
5	3																												
6	4																												

Problème 2
Mathieu a placé 4000 € sur un compte qui rapporte 2 % d’intérêts chaque année. Julie a placé 3500 € sur un compte qui rapporte 3 % d’intérêts chaque année.
Question : Au bout de combien d’années, Julie disposera-telle de plus d’argent que Mathieu ?

Modélisation du problème avec des suites : Soit u_n le capital de Mathieu au bout de n années On a $u_0=4000$ et la formule de récurrence $u_{n+1}=1,02u_n$ (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02 Soit v_n le capital de Julie au bout de n années On a $v_0=3500$ et la formule de récurrence $v_{n+1}=1,03v_n$ (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03	Définition : Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n on a $u_{n+1}=q\times u_n$. Le nombre q est appelé raison de la suite (u_n) . Schéma général :																												
Procédure 1 : utilisation des formes explicites des deux suites Pour tout entier n , on a $u_n=4000\times 1,02^n$ et $v_n=3500\times 1,03^n$ On cherche le plus petit entier n , tel que $v_n>u_n$. - On ne sait pas, pour l'instant, résoudre algébriquement cette inéquation. - On peut lire la table de valeurs de la calculatrice (début = 0 et pas = 1) avec $f(x)=4000\times 1,02^x$ et $g(x)=3500\times 1,03^x$ - On peut tracer graphiquement f et g et lire la première solution entière de l'inéquation $g(x)>f(x)$ - On peut aussi passer en mode suite et lire de la même façon la table de valeurs des deux suites.	Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q\neq 0$ alors pour tous entiers naturels n et m $u_n=q^n\times u_0$ (forme explicite) et $u_n=q^{n-m}\times u_m$																												
Procédure 2 : utilisation d'un algorithme U ← 4000 V ← 3500 N ← 0 Tant que U ≥ V : U ← U*1,02 V ← V*1,03 N ← N+1 Fin Afficher N	Procédure 3 : utilisation du tableur <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>1</td><td>n</td><td>U</td><td>V</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>4000</td><td>3500</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table> Cellule B3 : =B2*1,02 Cellule C3 : =C2*1,03		A	B	C	1	n	U	V	2	0	4000	3500	3	1			4	2			5	3			6	4		
	A	B	C																										
1	n	U	V																										
2	0	4000	3500																										
3	1																												
4	2																												
5	3																												
6	4																												

Les exemples

Les Propriétés

Exemple 1 : 1. Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 75$.

2. Calculer $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^9$

1. On reconnaît ici la somme des 75 premiers entiers, ainsi $S = \frac{75(75+1)}{2} = 2850$

2. On applique ici la 2^e formule avec $q = \frac{1}{3}$ et $k = 9$, ce qui donne : $S = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}}$, soit :

$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\frac{2}{3}}$ ou $S = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)$

Exemple 2 :

Pierre a deux propositions pour son salaire lors de son arrivée dans une entreprise le 01/01/2020:

Proposition 1: Il commence avec un salaire de 2000 euros mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 115 euros.

Proposition 2: Il commence avec un salaire de 2000 euros mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 5%.

Afin de faire de se constituer un pécule pour faire le tour du monde en 2030, Pierre souhaite mettre de côté, **un** salaire mensuel par an jusqu'à son départ.

Quelle proposition lui conseillez-vous de choisir ?

Modélisation du problème avec des suites :

Soit u_n le salaire de Pierre de l'année 2020 + n avec la proposition 1.

On a $u_0 = 2000$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + 115$; (u_n) est une suite arithmétique de raison 115

Soit v_n le salaire de Pierre de l'année 2020 + n avec la proposition 2.

On a $v_0 = 2000$ et la formule de récurrence $v_{n+1} = 1,05 v_n$; (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

Il nous faut comparer les **sommes de termes consécutifs** S_1 et S_2 des 10 (de 2020 à 2029 incluses) premiers salaires pour les propositions 1 et 2 respectivement.

Proposition 1 : on a $S_1 = 10 \times \frac{[u_0 + u_9]}{2}$, avec $u_9 = 2000 + 115 \times 9 = 3035$.

On obtient $S_1 = 25\,175$ €

Proposition 2 : on a $S_2 = 2000 \times \frac{1 - 1,05^{10}}{1 - 1,05} = -40000(1 - 1,05^{10})$

On obtient $S_2 = 25155,79$

On voit que $S_1 > S_2$. Nous conseillons donc à Pierre de prendre la proposition 1.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique

Propriété : Pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration :

Propriété : Pour tout réel $q \neq 1$, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$1 + q + q^2 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$

Démonstration :

Cas général : somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par

$(\text{nombre de termes}) \times \frac{[\text{1er terme} + \text{dernier terme}]}{2}$

Cas général : somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

La somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par

$[\text{premier terme}] \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$